

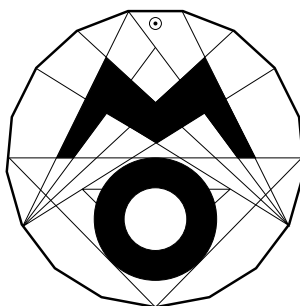
Hinweis

Diese Datei darf nur an Ausrichtende dieser 2. Runde der Mathematik-Olympiade weitergeleitet werden. Aufgaben und Lösungen sind bis zu den Wettbewerbsterminen geheim zu halten. Wegen möglicher abweichender Termine an bestimmten Wettbewerbssorten ist bis zum offiziellen Freischaltungstermin auf der Internetseite des Mathematik-Olympiaden e.V. (Klassen 3-4: 01.04., Klassen 5-12: 01.12.) jeder Verbreitung unbedingt entgegenzuwirken.

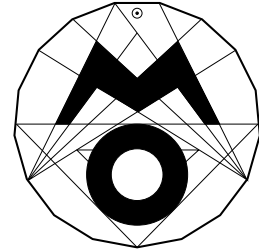
<http://www.mathematik-olympiaden.de>

Auch eine spätere auszugsweise oder vollständige Veröffentlichung ist nicht zulässig. Das schließt insbesondere das Internet mit ein. Über Ausnahmen entscheidet der Mathematik-Olympiaden e.V. auf Antrag an den 1. Vorsitzenden, Herrn Prof. Dr. Jürgen Prestin.

prestin@math.uni-luebeck.de



51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Aufgaben

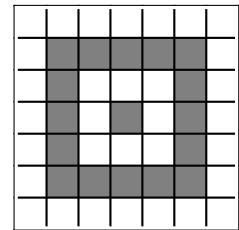


© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

510521

Zeichne auf Kästchenpapier ein Quadrat mit 13 Kästchen Kantenlänge. Färbe dann das zentrale Kästchen (also das Kästchen genau in der Mitte) grau. Um dieses zentrale Kästchen lässt du einen Ring aus weißen Kästchen. Dieser Ring wird jetzt wieder von einem Ring aus grauen Kästchen umgeben - und so weiter, bis du am Rand des Quadrats angekommen bist. Die Abbildung zeigt ein entsprechend gefärbtes Quadrat mit 7 Kästchen Kantenlänge.



- Wie viele Ringe aus weißen Kästchen gibt es in dem 13×13 - Quadrat?
- Wie viele Kästchen in dem 13×13 - Quadrat sind weiß gefärbt, wie viele grau?
- Wie viele weiße und wie viele schwarze Kästchen gibt es in einem 19×19 - Quadrat? (Löse diese Aufgabe bitte nicht durch eine Zeichnung, sondern durch Denken, und schreibe die Begründung auf!)

510522

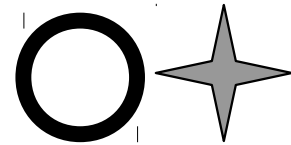
Ein Olivenbauer sagt: „Auf meinem Gut stehen 200 Olivenbäume. Jeder meiner Olivenbäume trägt im Jahr 36 kg Oliven. Jede Olive wiegt 5 g. Natürlich hat jede Olive einen Stein, und der wiegt 2 g. Um einen Liter Olivenöl zu pressen, brauche ich neunhundert Oliven.“

- Wie viel wiegen die Oliven, aus denen zwei Liter Olivenöl gepresst wird?
- Wie viele Liter Olivenöl kann der Bauer pro Jahr aus der Olivenernte herstellen?
- Wie viel wiegen alle Steine zusammen, die bei der Pressung übrig bleiben?
- Ein Liter Öl wiegt 1 kg. Der Rest von der Pressung - also das, was weder Stein noch Öl ist - kann als Tierfutter verwendet werden. Wie viel Tierfutter kann der Bauer verkaufen?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

510523

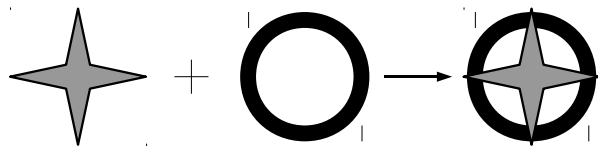
Sarah hat zwei Stempeltypen bekommen, einen Stempeltyp, der einen Kreis ergibt, und einen Stempeltyp, der einen Stern ergibt. Sie überlegt sich, ob sie mit diesen beiden Stempeltypen und vier Stempelkissen mit den Farben Rot, Grün, Orange und Blau jede Seite ihres Tagebuchs unterschiedlich „nummerieren“ kann; das Tagebuch hat einhundert Seiten.



- a) Ihre erste Idee ist, einfach zwei Stempel unten auf jede Seite so zu setzen, dass sich jede Seite von jeder anderen unterscheidet - sei es durch mindestens eine Farbe der Stempel, sei es durch den Typ der Stempel, sei es durch die Reihenfolge. (Roter Kreis, dann blauer Stern ist also eine andere „Seitennummer“ als blauer Stern, dann roter Kreis).
Wie viele Seiten kann sie auf diese Art nummerieren? Reicht dies für das Tagebuch?

- b) Sarahs Freundin Katrin schlägt eine andere „Nummerierungs-Stempelung“ vor:

„Pass’ mal auf, auf jede Seite machst du unten zwei Doppel-Stempel, also jeweils einen Stern im Kreis.“

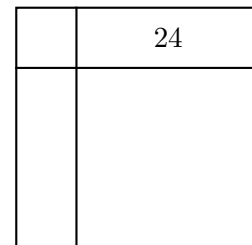


Und damit es hübscher aussieht, soll jeder Kreis eine andere Farbe haben, und jeder Stern soll sich in der Farbe von seinem Kreis unterscheiden.“

Wie viele Seiten können mit Katrins Vorschlag „nummeriert“ werden?

510524

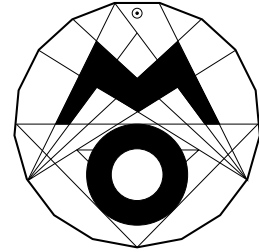
Ein Quadrat ist durch zwei zu den Kanten parallele Strecken so geteilt, dass sich vier Felder ergeben. Die beiden Felder links oben und rechts unten sind dabei wiederum Quadrate, wobei das Quadrat links oben in das Quadrat rechts unten hineinpasst (siehe Abbildung; diese Abbildung ist nicht maßstäblich!).



Das Feld rechts oben hat den Flächeninhalt von 24 Einheitsquadraten und ganzzahlige Kantenlängen.

Bestimme alle Möglichkeiten für die anderen drei Flächeninhalte.

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

510621

Anton zerschneidet ein A4-Blatt in vier Teile. Das soll die erste Zerlegung sein. Er nimmt dann eines der Stücke und zerschneidet es wieder in vier Teile. Das liefert die Zerlegung Nummer 2.

- a) Das macht er sechsmal so. Wie viele Schnipsel hat Anton nach der Zerlegung Nummer 6? Bezeichne diese Anzahl mit $A(6)$.
- b) Gib eine Formel an, wie man die Anzahl $A(n)$ der Schnipsel nach der n -ten Zerlegung aus der Nummer n ermitteln kann, und begründe sie.
- c) Jetzt ändert Anton seine Schneidearbeit:
In der ersten Zerlegung zerschneidet er ein neues A4-Blatt in fünf Teile.
In der zweiten Zerlegung wählt er zwei Stücke aus und zerschneidet beide in jeweils fünf Teile.
In der dritten Zerlegung wählt er drei Stücke aus und zerschneidet alle drei in jeweils fünf Teile - usw.
Wie viele Schnipsel sind bei dieser Zerschneidungsweise nach der Zerlegung Nummer 7 vorhanden?

510622

Onkel Otto und Tante Lore sind beide begeisterte Wanderer; allerdings läuft Tante Lore viel schneller. Sie wandert mit 6 Kilometern pro Stunde, ohne außer Atem zu kommen. Onkel Otto hingegen schafft nur 4 Kilometer pro Stunde.

Am Sonntag befinden sie sich getrennt voneinander in zwei Dörfern, zwischen denen 12 Kilometer liegen; Onkel Otto ist in Westerloh, Tante Lore in Osterloh.

- a) Onkel Otto schlägt zunächst vor: „Weißt du, genau auf der halben Strecke gibt es ein nettes Lokal. Lass’ es uns so machen, dass wir da gleichzeitig eintreffen, dann kannst du noch ein wenig später losgehen als ich.“
Wann müsste Tante Lore losgehen, wenn Onkel Otto um 14 Uhr aufbricht?
- b) Tante Lore sagt: „Gut, machen wir so.“
Onkel Otto denkt sich: „Ich nehme mein Fahrrad, damit fahre ich ganz gemütlich mit 10 Kilometern pro Stunde. Und damit Tante Lore das nicht merkt, stelle ich das Rad einen Kilometer vor dem Lokal ab und laufe den Rest.“
Wann muss er losradeln?

- c) Onkel Otto sitzt auf dem Fahrrad und hat Zeit zum Nachdenken. Er überlegt: „Wenn wir beide zu Fuß um 15 Uhr gestartet wären - wann und wo auf der Strecke zwischen Westerloh und Osterloh würden wir uns treffen?“
Ermittle die Antworten auf die beiden Fragen von Onkel Otto.

510623

In der Arbeitsgemeinschaft Mathematik soll mit Dominosteinen gearbeitet werden. Die Kinder fertigen die Spiele, die aus 28 Steinen bestehen, im Technik-Unterricht an. Ein Dominostein soll 6 cm lang, 3 cm breit und 1 cm hoch sein.

- a) Auch eine Schachtel soll angefertigt werden. Sie soll die Form eines Quaders haben. Welche Maße (Länge \times Breite \times Höhe) kann die Schachtel haben, wenn mindestens 2 Schichten der Steine übereinanderliegen sollen? Gib 3 verschiedene Möglichkeiten an, die für die Schachtel praktisch sind und sie jeweils ganz ausfüllen.
- b) In der Arbeitsgemeinschaft legen die Kinder aus allen 28 Dominosteinen Rechtecke, wobei die Steine wie üblich auf einer der 3×6 - Seitenflächen liegen sollen. Welche Maße (Länge \times Breite) können die Rechtecke haben? Ermittle alle Möglichkeiten.
- c) Aus 10 der Steine sollen jetzt „hohle“ Rechtecke gelegt werden. Der Rand soll 3 cm dick sein. Das Bild zeigt so ein Rechteck aus 6 Steinen.



Gib vier verschiedene Anordnungen für 10 Steine an. Dabei werden zwei Anordnungen als verschieden angesehen, wenn die leeren Innenflächen nicht deckungsgleich sind.

Zeichne in deiner Skizze einen Stein $1 \text{ cm} \times 0,5 \text{ cm}$ groß.

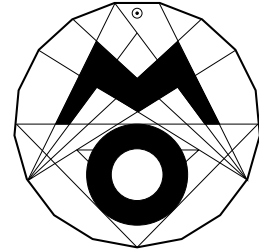
510624

Die vier Freundinnen Celina, Martina, Vanessa und Sarah sind sehr tierlieb und betreuen in den Ferien die Haustiere der Nachbarn. Bei den Tieren handelt es sich um ein Hamster, einen Vogel, einen Hund und eine Katze, und sie heißen - in irgendeiner Reihenfolge - Benny, Felix, Max und Mister X.

- (1) Sarah bringt ihrer Freundin Futter für den Hamster mit und erzählt von ihrem Besuch bei Benny.
- (2) Celina, die keine Katzen mag, besucht die Freundin, die den Hamster betreut. Beide tauschen Neuigkeiten aus, und Celina erzählt, dass Mister X in seinem Pflegequartier eine Lampe zerbrochen hat.
- (3) Vanessa hätte gern den Hamster oder Felix betreut, erzählt sie der Freundin, bei der gerade der Hund wohnt. Nun muss sie eine neue Lampe kaufen, weil sie nicht aufgepasst hat.
- (4) Martina ist mit ihrem Tier namens Max sehr zufrieden, umso mehr, als Sarah ihr erzählt, dass sie vor kurzem ihren Vogel einfangen musste.

Welche Freundin betreut welches Haustier, und wie heißen die Tiere?

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

510721

Annika liebt Zahlenspielerien und wohnt in der Eulerstraße 56. Als sie in der Adressenliste ihrer Klasse die Hausnummern ihrer Mitschüler mit der eigenen vergleicht, fallen ihr besondere Zusammenhänge auf:

- (1) Die Summe der Hausnummern ihrer vier liebsten Klassenkameraden Priska, Betty, Sarah und Holger ergibt ihre eigene Hausnummer.
 - (2) Die Hausnummer von Betty ist doppelt so groß wie die Hausnummer von Priska.
 - (3) Sarah hat eine Hausnummer, die doppelt so groß wie Bettys Hausnummer ist.
 - (4) Holger wohnt in einem Haus mit einer Hausnummer, die genau halb so groß wie Bettys Hausnummer ist.
- a) Ermittle die Hausnummern der vier besten Freunde von Annika.
- b) Weise zusätzlich durch eine Probe nach, dass die in Teilaufgabe a) ermittelten Hausnummern tatsächlich die im Aufgabentext gestellten Bedingungen erfüllen, d. h. führe eine *Probe am Text* durch.
- Bemerkung:* Die hier geforderte Probe ist als Existenzbeweis logisch nicht erforderlich.

510722

Gegeben sind zwei Strecken mit den Streckenlängen $a = 13$ cm und $b = 7$ cm. Aus diesen beiden Strecken sollen unter Hinzunahme einer dritten Strecke Dreiecke gezeichnet werden. Alle Größen werden in Zentimeter angegeben.

- a) Ermittle alle möglichen Längen der dritten Strecke, wenn außerdem gefordert wird, dass die Maßzahl p der Länge dieser Strecke eine Primzahl ist.
- b) Ermittle alle möglichen Längen der dritten Strecke, wenn außerdem gefordert wird, dass die Maßzahl q der Länge dieser Strecke derart gewählt wird, dass die Maßzahl u des Umfangs des Dreiecks eine Primzahl ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

510723

Die sechs Spielfreunde Albert, Bruno, Clemens, David, Erik und Franz wollen in zwei Dreiergruppen gegeneinander spielen. Sie äußern folgende Forderungen für die Aufteilung:

- (1) Albert: „Ich möchte weder mit David noch mit Franz spielen.“
 - (2) Bruno: „Wenn Erik und Clemens oder Erik und Franz zusammen in einer Spielgruppe sind, dann möchte ich überhaupt nicht spielen.“
 - (3) Clemens: „Ich möchte mit Franz spielen.“
 - (4) David: „Ich möchte nicht mit Franz spielen.“
 - (5) Erik: „Ich möchte nicht zusammen mit Albert und David spielen.“
- a) Ermittle eine Aufteilung der sechs Spielfreunde in zwei Dreiergruppen, welche den Forderungen (1), (2) und (3) genügt.
 - b) Zeige, dass es keine weitere Aufteilung in zwei Dreiergruppen gibt, welche den Forderungen (1), (2) und (3) genügt.
 - c) Untersuche, ob es Aufteilungen in zwei Dreiergruppen gibt, welche den Forderungen (1), (2), (3) und (4) genügen.
 - d) Untersuche, ob es Aufteilungen in zwei Dreiergruppen gibt, welche den Forderungen (1), (2), (3) und (5) genügen.

510724

- a) Jemand bildet aus zwei positiven ganzen Zahlen die Summe, die Differenz und das Produkt.
Untersuche, ob es vorkommen kann, dass keines dieser drei Ergebnisse durch 3 teilbar ist.
- b) Jemand bildet aus drei positiven ganzen Zahlen, für die $a \geq b \geq c$ gilt, die Summe $a + b + c$ und die Differenzen $a - b$, $b - c$, $a - c$.
Untersuche, ob es vorkommen kann, dass keines dieser vier Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

510821

Der Wanderer Wendelin beginnt seine Tageswanderung mit dem ersten Sonnenstrahl um 6:00 Uhr und möchte seinen verschlafenen Vetter Valentin besuchen, der 34 km entfernt wohnt. Dieser hat just am gleichen Tag dieselbe Idee und begibt sich um 10:00 Uhr auf gleichem Wege zu Wendelin. Als sich beide um 12:00 Uhr in der Gaststätte „Goldener Treff“ begegnen, ist die Freude groß. Beim Mittagessen stellen sie fest, dass jeder mit gleichbleibender Geschwindigkeit lief.

- a) Zusätzlich ist bekannt, dass die Länge von Valentins Wanderweg 10 km beträgt. Ermittle die Geschwindigkeiten von Wendelin und Valentin in Kilometer pro Stunde. Berechne das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten der beiden Wanderer.
- b) Zeige, dass man die Wandergeschwindigkeit von Wendelin und von Valentin auch aus dem arithmetischen Mittel der Wandergeschwindigkeiten von 4,5 km/h eindeutig bestimmen kann, ohne die Länge von Valentins Wanderweg zu kennen.

Hinweis: Das *arithmetische Mittel* (auch Durchschnitt) von Werten ist ein Mittelwert, der als Quotient aus der Summe aller Werte und der Anzahl der Werte definiert ist.

510822

Die 6 Schulfreunde Arno, Bodo, Cuno, Doro, Enno und Fero wollen in einem Kaufhaus die Rolltreppe zur nächsten Etage benutzen.

- a) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn sie sich nacheinander jeweils auf eine Stufe stellen.
- b) Ermittle die Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten für Bodo, Cuno, Doro und Enno, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno als erster und Fero als letzter mit der Rolltreppe fahren wollen.
- c) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno, Bodo und Cuno auf drei unmittelbar aufeinander folgenden Stufen stehen wollen, aber nicht unbedingt in dieser Reihenfolge.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

510823

Die Zahl 63 ist 7-mal so groß wie ihre Quersumme, da $63 = 7 \cdot (6 + 3)$ gilt.

- a) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die 7-mal so groß sind wie ihre Quersumme.
- b) Ermittle alle dreistelligen Zahlen, die 19-mal so groß sind wie ihre Quersumme.

510824

a) Von einem Sehnenviereck $ABCD$ mit dem Umkreismittelpunkt M ist bekannt:

- (1) Die Größe des Innenwinkels BAD beträgt 80° .
- (2) Die Größe des Winkels MAD beträgt 30° .
- (3) Die Größe des Winkels BMC beträgt 70° .

Fertige eine Skizze an und berechne unter diesen Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel CBA , DCB und ADC .

Hinweis: Es darf ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass der Punkt M im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegt.

b) Die Abbildung A 510824 zeigt vier verschieden große Kreise mit den Mittelpunkten A , B , C und D , wobei die Kreise einander in den Punkten P , Q , R und S berühren.

Beweise: Es gibt einen Kreis, auf dem diese vier Berührungspunkte liegen.

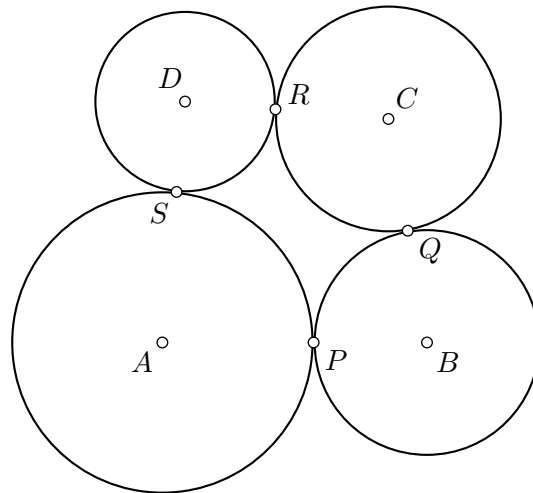
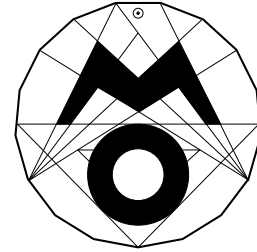


Abbildung A 510824

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

510921

Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen

$$a + b \neq 0,9, \quad a - b \neq 3,6, \quad a \cdot b \neq 1,6, \quad a : b \neq 3,9.$$

Die Zahlen 0,9; 3,6; 1,6 und 3,9 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.

Ermitteln Sie die Zahlen a und b . Weisen Sie nach, dass nur ein Zahlenpaar $(a; b)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

510922

Eine Anzeigetafel ist mit roten, grünen und blauen Leuchtdioden bestückt. Das Übertragungskabel vom Steuerpult zur Tafel liefert in drei getrennten Leitungen für jede der drei Farben die Signale „0“ (Licht aus) bzw. „1“ (Licht ein). Die Kombination (R, G, B) dieser Farbanteile liefert 8 Anzeigefarben:

$$\left| \begin{array}{l} (0, 0, 0) = \text{schwarz} \\ (1, 0, 0) = \text{rot} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} (0, 0, 1) = \text{blau} \\ (1, 0, 1) = \text{magenta} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} (0, 1, 0) = \text{grün} \\ (1, 1, 0) = \text{gelb} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} (0, 1, 1) = \text{cyan} \\ (1, 1, 1) = \text{weiß} \end{array} \right|$$

Bei der Herstellung der Übertragungskabel können folgende zwei Fehler auftreten:

Fehler 1: Im Kabel werden genau zwei der drei Farbleitungen vertauscht. (Z. B. kommt ein gesendetes Grün-Signal am Blau-Anschluss der Tafel an und umgekehrt.)

Fehler 2: Genau zwei der drei Leitungen sind schlecht isoliert und berühren sich. (Eine Leitung im Zustand „1“ setzt auch die Nachbarleitung auf „1“, selbst wenn diese eigentlich das Signal „0“ übertragen soll).

Wenn in einem Leitungspaar der Fehler 1 auftritt, dann tritt Fehler 2 höchstens zwischen genau einer dieser beiden Leitungen und der dritten Leitung auf.

Ein Qualitätstest besteht darin, die Signalkombination einer der 8 möglichen Farben an die Tafel zu senden und mit der Signalkombination der tatsächlich ankommenden Farbe zu vergleichen. Mit mehreren solcher Tests will man ermitteln, ob ein Fehler im Kabel ist und um welche(n) Fehler zwischen welchen Leitungen es sich handelt.

Zum Test eines Kabels sendet man zunächst die Signalkombination $(1, 0, 0)$.

Ihre Aufgabe: Weisen Sie nach, dass in jedem Fall ein weiterer Test ausreicht, um alle Fehler und die betroffenen Leitungen zu ermitteln.

510923

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (p, z) aus einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl z , für welche die Beziehung $z^2 = 25p + 9$ gilt.

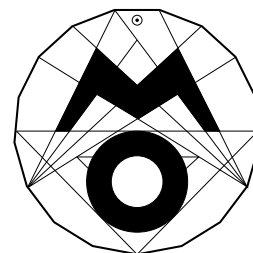
510924

Es sei ABC ein Dreieck mit $|AC| < |BC|$. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneide die Seite \overline{AB} in einem Punkt P , die Außenwinkelhalbierende desselben Winkels schneide die Gerade AB in einem Punkt Q . Die Punkte X und Y seien die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden AC bzw. BC .

- a) Beweisen Sie, dass das Dreieck PCQ rechtwinklig ist, und dass $|PX| = |PY|$ gilt.
- b) Beweisen Sie, dass das Verhältnis der Längen der Strecken \overline{AP} und \overline{BP} mit dem Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke APC und BPC übereinstimmt.
- c) Beweisen Sie, dass $|AP| : |PB| = |AC| : |CB|$ gilt.
- d) Beweisen Sie, dass $|AQ| : |QB| = |AC| : |CB|$ gilt.

Hinweis: In jeder der vier Teilaufgaben ist die Ausführung eines Beweises verlangt. Das bloße Zitieren eines bekannten Satzes genügt hier nicht.

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511021

Eine Anzeigetafel ist mit roten, grünen und blauen Leuchtdioden bestückt. Das Übertragungskabel vom Steuerpult zur Tafel liefert in drei getrennten Leitungen für jede der drei Farben die Signale „0“ (Licht aus) bzw „1“ (Licht ein). Die Kombination (R, G, B) dieser Farbanteile liefert 8 Anzeigefarben:

$(0, 0, 0) = \text{schwarz}$	$(0, 0, 1) = \text{blau}$	$(0, 1, 0) = \text{grün}$	$(0, 1, 1) = \text{cyan}$
$(1, 0, 0) = \text{rot}$	$(1, 0, 1) = \text{magenta}$	$(1, 1, 0) = \text{gelb}$	$(1, 1, 1) = \text{weiß}$

Bei der Herstellung der Übertragungskabel können folgende zwei Fehler auftreten:

Fehler 1: Im Kabel werden genau zwei der drei Farbleitungen vertauscht (z. B. kommt ein gesendetes Grün-Signal am Blau-Anschluss der Tafel an und umgekehrt).

Fehler 2: Genau zwei der drei Leitungen sind schlecht isoliert und berühren sich. (Eine Leitung im Zustand „1“ setzt auch die Nachbarleitung auf „1“, selbst wenn diese eigentlich das Farbsignal „0“ übertragen soll).

Wenn in einem Leitungspaar der Fehler 1 auftritt, dann tritt Fehler 2 höchstens zwischen genau einer dieser beiden Leitungen und der dritten Leitung auf.

Ein Qualitätstest besteht darin, die Signalkombination einer der 8 möglichen Farben an die Tafel zu senden und mit der Signalkombination der tatsächlich ankommenden Farbe zu vergleichen. Mit mehreren solcher Tests will man ermitteln, ob ein Fehler im Kabel ist und um welche(n) Fehler zwischen welchen Leitungen es sich handelt.

Ihre Aufgabe: Weisen Sie in jedem Fall nach, dass kein Test allein zur vollständigen Fehlerermittlung ausreicht.

511022

Für zwei positive rationale Zahlen a und b mit $a > 2$ werden die Terme a^2 , $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $a : b$ und b^2 gebildet.

Weisen Sie nach, dass die Summe der sechs Terme stets größer als 12 ist.

511023

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (p, z) aus einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl z , für welche die Beziehung $z^2 = 25p + 9$ gilt.

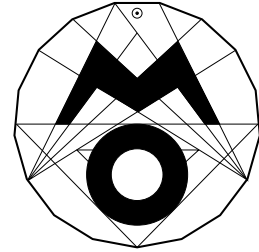
511024

Es sei ABC ein Dreieck mit $|AC| < |BC|$. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneide die Seite \overline{AB} in einem Punkt P , die Außenwinkelhalbierende desselben Winkels schneide die Gerade AB in einem Punkt Q . Die Parallele zu AC durch B schneide die Gerade CP in R .

- a) Beweisen Sie, dass das Dreieck PCQ rechtwinklig und das Dreieck RBC gleichschenkelig ist.
- b) Beweisen Sie, dass $|AP| : |PB| = |AC| : |CB|$ gilt.
- c) Beweisen Sie, dass $|AQ| : |BQ| = |AC| : |CB|$ gilt.
- d) Es gelte $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $|AC| = 3$ und $|BC| = 4$.
Bestimmen Sie das Verhältnis $|QC| : |CP|$!

Hinweis: In jeder der Teilaufgaben a)–c) ist die Ausführung eines Beweises verlangt. Das bloße Zitieren eines bekannten Satzes genügt hier nicht.

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalsrunde)
Klasse 11-13
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511321

Es sei $Q(n)$ die Quersumme der natürlichen Zahl n . Man beweise, dass

$$Q(m+n) \leq Q(m) + Q(n)$$

für alle positiven ganzen Zahlen m und n gilt.

511322

Die *Salinon* genannte Figur wird von vier Halbkreisbögen begrenzt (siehe Abbildung A511322). Die Strecken \overline{AC} und \overline{DB} sind gleich lang.

Der Kreis k berührt die Halbkreise über \overline{AB} und \overline{CD} derart, dass die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte ein Durchmesser von k ist, der auf der Strecke \overline{AB} senkrecht steht.

Man beweise, dass das Salinon und der Kreis k flächengleich sind.

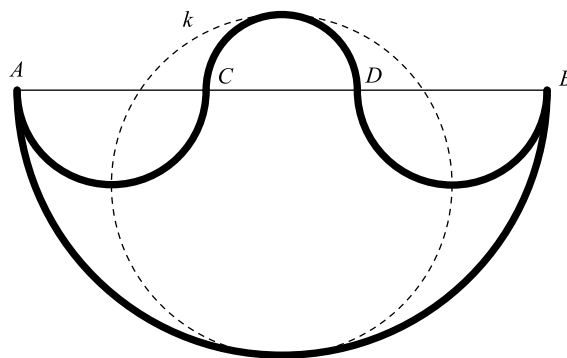


Abbildung A 511322

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

511323

Es sei a eine reelle Zahl. Man ermittle in Abhängigkeit von a alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$x^3 + a^3 = x^2 - xa + a^2$$

erfüllen.

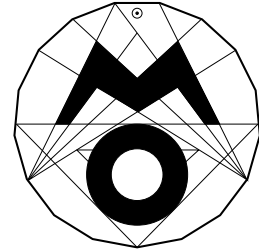
511324

In einem Fechtturnier mit 2^n Teilnehmern kämpft jeder Fechter genau einmal gegen jeden anderen. Kein Kampf endet unentschieden.

Eine Reporterin möchte nacheinander Einzelinterviews mit $n + 1$ Fechtern führen. Diese sollen so ausgewählt werden, dass jeder interviewte Fechter gegen alle Fechter, die vor ihm interviewt wurden, gesiegt hat.

- a) Man zeige, dass die Reporterin für $n = 1$ und $n = 2$ eine entsprechende Auswahl von Fechtern für die Interviews treffen kann.
- b) Man zeige, dass dies für alle positiven ganzen Zahlen n möglich ist.

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalsrunde)
Klasse 5
Lösungen



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

510521 Lösung

10 Punkte

Teil a) Es gibt drei Ringe aus weißen Kästchen.

Teil b) Die drei weißen Ringe weisen 8, 24 und 40 Kästchen auf, also sind insgesamt $(8 + 24 + 40 =)$ 72 Kästchen weiß gefärbt. Da das 13×13 - Quadrat insgesamt $(13 \cdot 13 =)$ 169 Kästchen enthält, müssen $(169 - 72 =)$ 97 Kästchen grau gefärbt sein.

Teil c) Der erste Ring enthält 7 Kästchen mehr als das zentrale Kästchen, jeder weitere Ring enthält 8 Kästchen mehr als der vorherige, jeder weiße Ring also 16 Kästchen mehr als der vorherige weiße Ring und ebenso jeder graue Ring 16 Kästchen mehr als der vorherige graue Ring.

Vom 13×13 - Quadrat zum 19×19 - Quadrat gibt es zwei weiße Ringe und einen grauen Ring mehr, also haben die beiden neuen weißen Ringe $(40 + 16 =)$ 56 Kästchen

bzw. $(56 + 16 =)$ 72 Kästchen, und daher gibt es insgesamt $(72 + 56 + 72 =)$ 200 weiße Kästchen.

Das zentrale Kästchen und die vier grauen Ringe weisen 1, 16, 32, 48 und 64 Kästchen auf, so dass insgesamt 161 Kästchen grau sind.

Da $19 \cdot 19 = 361 = 161 + 200$ gilt, ist das große Quadrat so ausgefüllt.

510522 Lösung

10 Punkte

Teil a) Da aus 900 Oliven ein Liter Öl entsteht und da jede Olive 5 g wiegt, benötigt man $(2 \cdot 900 \cdot 5 \text{ g} =)$ 9000 g = 9 kg Oliven für zwei Liter Öl.

Teil b) Alle Bäume zusammen tragen $(200 \cdot 36 \text{ kg} =)$ 7200 kg Oliven.

Da aus 9 kg Oliven zwei Liter Öl entstehen, ergibt diese Menge an Oliven eine Ölmenge von $(7200 : 9 \cdot 2 \text{ l} =)$ 1600 l.

Teil c) In einem Kilogramm Oliven befinden sich $(1000 : 5 =)$ 200 Oliven. Da jeder Stein 2 g wiegt, wiegen die Steine in einem Kilogramm Oliven $(200 \cdot 2 \text{ g} =)$ 400 g = 0,4 kg. Da die Gesamternte 7200 kg beträgt, enthält diese Olivenmenge $(7200 \cdot 0,4 \text{ kg} =)$ 2880 kg an Steinen.

Teil d) Die Gesamternte beträgt nach b) 7200 kg.

Davon sind nach c) 2880 kg Steine.

Das Öl wiegt $(1600 \cdot 1 \text{ kg} =)$ 1600 kg.

Folglich wiegt der Rest, der als Tierfutter verwendet wird,

$(7200 \text{ kg} - 2880 \text{ kg} - 1600 \text{ kg} =)$ 2720 kg.

Teil a) Vier verschiedene Kreise und vier verschiedene Sterne ergeben zusammen acht Möglichkeiten an jeder der beiden Stellen des Stempelsymbols. Da ansonsten keine Einschränkungen gegeben sind, kann man auf diese Weise ($8 \cdot 8 =$) 64 Kombinationen erzielen und damit 64 Seiten „nummerieren“, also viel zu wenig für die 100 Seiten des Tagebuchs.

Teil b) Katrins Schema ergibt: Die farbliche Reihenfolge der zwei Kreise ermöglicht ($4 \cdot 3 =$) 12 Möglichkeiten. Jeder Stern kann noch eine von 3 Farben bekommen, die nicht der Farbe des Kreises entsprechen; so ergeben sich insgesamt ($4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$) 108 Möglichkeiten, also genug zur „Nummerierung“ für das Tagebuch.

Die Zahl 24 lässt sich wie folgt zerlegen:

$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6.$$

Dass die Flächeninhalte der beiden Rechtecke gleich sind, folgt sofort aus der Zerlegung. Ein Beweis wird hier nicht erwartet: Der Sachverhalt wird als unmittelbar ersichtlich angesehen.

Damit ergeben sich folgende Möglichkeiten für die Flächeninhalte:

Zerlegung	Flächeninhalt Quadrat links oben	Flächeninhalt Rechteck links unten	Flächeninhalt Quadrat rechts unten
$1 \cdot 24$	$1 \cdot 1 = 1$	24	$24 \cdot 24 = 576$
$2 \cdot 12$	$2 \cdot 2 = 4$	24	$12 \cdot 12 = 144$
$3 \cdot 8$	$3 \cdot 3 = 9$	24	$8 \cdot 8 = 64$
$4 \cdot 6$	$4 \cdot 4 = 16$	24	$6 \cdot 6 = 36$

Punktverteilungsvorschläge

Die Punktzahlen für die einzelnen *Aufgaben* sind verbindlich.

Die Einschätzung der Punktzahlen für einzelne *Teilschritte* einer Schülerlösung (nach dem Maßstab „Verwendbarkeit des Teilschrittes in einem zum Ziel führenden Lösungsweg“) liegt beim Korrektor; die folgenden Aufteilungen sind möglicherweise dem Vorgehen in einer Schülerlösung anzupassen und können in diesem Sinne gelegentlich abgeändert werden.

Aufgabe 510521 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 510522 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	2 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	2 Punkte
Teil d)	3 Punkte

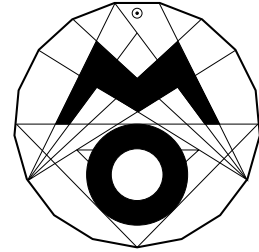
Aufgabe 510523 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	5 Punkte
Teil b)	5 Punkte

Aufgabe 510524 *Insgesamt: 10 Punkte*

Zerlegung	4 Punkte
Durchführung der Möglichkeiten	6 Punkte

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

510621 Lösung

10 Punkte

Teil a) Da Anton in jedem der sechs Schneide-Schritte aus einem ausgewählten Teil vier macht, hat er nach dem sechsten Schritt $(6 \cdot 3 + 1 =)$ 19 Schnipsel.

Hinweis: Auch ein direktes Aufschreiben der Schritte ist denkbar:

$$A(1) = 4, A(2) = 3 + 4 = 7, A(3) = 3 + 3 + 4 = 10, \dots,$$

$$A(6) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 19.$$

Teil b) $A(1)$ ist laut Aufgabenstellung 4: $A(1) = 4$.

In jedem folgenden Schritt kommen 3 Schnipsel hinzu, also hat man dieses Hinzufügen im Schritt n genau $(n - 1)$ -mal gemacht.

Folglich ist

$$A(n) = (n - 1) \cdot 3 + 4.$$

Ebenso gilt:

$$A(n) = 3 \cdot n + 1.$$

Teil c) Sei $B(n)$ die Anzahl der Schnipsel nach der n -ten Zerlegung. Man erhält direkt aus der Zerschneidungsweise:

$$B(1) = 5,$$

$$B(2) = 3 + 5 + 5 = 13,$$

$$B(3) = (13 - 3) + 5 + 5 + 5 = 25,$$

$$B(4) = (25 - 4) + 4 \cdot 5 = 41,$$

$$B(5) = (41 - 5) + 5 \cdot 5 = 61,$$

$$B(6) = (61 - 6) + 6 \cdot 5 = 85,$$

$$B(7) = (85 - 7) + 7 \cdot 5 = 113.$$

Es sind also 113 Schnipsel vorhanden.

Allgemein ergibt sich

$$B(n) = B(n - 1) + 4n.$$

Teil a) Onkel Otto braucht für die 6 Kilometer zum Lokal 1 Stunde 30 Minuten, Tante Lore hingegen nur eine Stunde, also 30 Minuten weniger. Folglich müsste sie um 14:30 Uhr losgehen.

Teil b) Onkel Otto will 5 Kilometer fahren, das macht bei 10 km pro Stunde eine Fahrzeit von einer halben Stunde. Den letzten Kilometer will er gehen, dafür benötigt er bei seiner Geschwindigkeit eine Viertelstunde. Insgesamt ist er folglich 45 Minuten unterwegs. Da er gegenüber dem reinen Laufen, das ja 90 Minuten dauert, so 45 Minuten spart, braucht er erst um 14:45 Uhr loszuradeln.

Teil c) Zusammengerechnet bewegen sich Onkel Otto und Tante Lore mit $(6 + 4 =) 10$ km/h aufeinander zu. Für die 12 Kilometer brauchen sie also $(12 \text{ km} : 10 \text{ km/h} =) 1,2$ Stunden, d.h. 1 Stunde und 12 Minuten; sie würden sich also um 16:12 Uhr treffen.

Tante Lore ist ja mit 6 km/h gelaufen, also hat sie in der Laufzeit $(6 \text{ km/h} \cdot 1,2 \text{ h} =) 7,2$ km zurückgelegt; sie treffen sich daher $(12 \text{ km} - 7,2 \text{ km} =) 4,8$ km vom Ausgangspunkt von Onkel Otto.

510623 Lösung

Teil a) Im Folgenden werden drei Möglichkeiten beschrieben, in denen die Schachteln jeweils unterschiedliche Maße haben (das Schachtelvolumen muss stets $(28 \cdot 18 =) 504 \text{ cm}^3$ betragen):

4 Schichten zu je 7 Steinen, die flach nebeneinander liegen:

Die Schachtel muss dann $(7 \cdot 3 \text{ cm} =) 21$ cm lang, 6 cm breit und $(4 \cdot 1 \text{ cm} =) 4$ cm hoch sein.



2 Schichten zu je 14 Steinen, die hochkant (auf der langen Seite der Dominosteine) nebeneinander stehen:

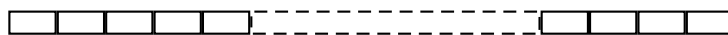
Die Schachtel muss dann $(14 \cdot 1 \text{ cm} =) 14$ cm lang, 6 cm breit und $(2 \cdot 3 \text{ cm} =) 6$ cm hoch sein.

4 Schichten zu je 7 Steinen, die hochkant (auf der langen Seite) nebeneinander stehen:

Die Schachtel muss dann $(7 \cdot 1 \text{ cm} =) 7$ cm lang, 6 cm breit und $(4 \cdot 3 \text{ cm} =) 12$ cm hoch sein.

Teil b) Da nur die Maße gesucht sind, ist es egal, wie herum die Dominosteine in den Rechtecken liegen. Die obere Fläche eines Dominosteins hat einen Flächeninhalt von $(3 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} =) 18 \text{ cm}^2$, und alle Dominosteine nehmen eine Fläche von $(28 \cdot 18 \text{ cm}^2 =) 504 \text{ cm}^2$ ein. Wegen der Kantenlängen der Dominosteine (3 cm und 6 cm) müssen die Seitenlängen des zu legenden Rechtecks Vielfache von 3 sein.

Die kleinste Seitenlänge für ein gesuchtes Rechteck ist 3 cm. Dann muss die andere Seite $(504 \text{ cm}^2 : 3 \text{ cm} =) 168$ cm lang sein und die Steine liegen wie folgt:

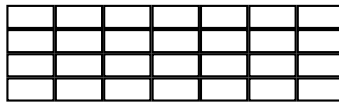


Die nächste mögliche Seitenlänge für ein Rechteck sind 6 cm. Daraus ergeben sich für die zweite Seite $(504 \text{ cm}^2 : 6 \text{ cm} =) 84$ cm und die Steine können wie folgt liegen (auch eine andere Anordnung ist möglich):



Für die nächste mögliche Seitenlänge von 9 cm ergeben sich zwar für die zweite Seitenlänge $(504 \text{ cm}^2 : 9 \text{ cm} =) 56$ cm, aber diese Länge kann nicht mit den Dominosteinen gelegt werden, weil 56 nicht durch 3 teilbar ist.

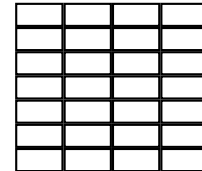
Erst für 12 cm Seitenlänge findet man eine passende zweite Seitenlänge, die gelegt werden kann, und das sind $(504 \text{ cm}^2 : 12 \text{ cm} =) 42 \text{ cm}$. Das ist ein Vielfaches von 6 cm, und die Steine können wie folgt liegen:



Da 504 nicht durch 15 teilbar ist, kann 15 cm keine Seitenlänge für das Rechteck sein.

Für 18 cm Seitenlänge ergibt sich als zweite Seitenlänge für das Rechteck $(504 \text{ cm}^2 : 18 \text{ cm} =) 28 \text{ cm}$, aber 28 ist nicht durch 3 teilbar und kann nicht Seitenlänge des gesuchten Rechtecks sein.

Ein weiteres Rechteck ergibt sich für die Seitenlängen 21 cm und $(504 \text{ cm}^2 : 21 \text{ cm} =) 24 \text{ cm}$, die beide auch gelegt werden können, wie ein Beispiel zeigt:

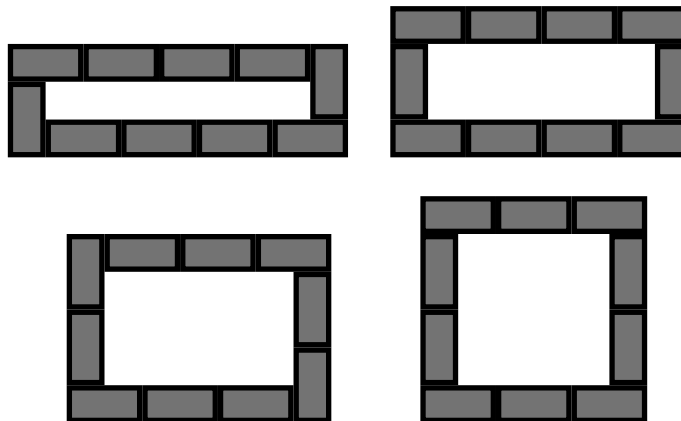


Es können 4 Rechtecke mit den Seitenlängen

- (1) 3 cm und 168 cm,
- (2) 6 cm und 84 cm,
- (3) 12 cm und 42 cm und
- (4) 21 cm und 24 cm

gelegt werden.

Teil c) Aus 10 Steinen kann man die folgenden vier „hohlen“ Rechtecke legen:



Aus den Aussagen (1) bis (4) folgt:

Der Hamster wird nicht von Sarah [siehe (1)], nicht von Celina [siehe (2)] und auch nicht von Vanessa [siehe (3)] betreut; er ist folglich bei Martina untergebracht und heißt Max [siehe (4)].

Die Katze wohnt nicht bei Celina [siehe (2)] und auch nicht bei Sarah [siehe (4)]; sie wird von Vanessa betreut. Da Vanessa eine neue Lampe kaufen muss [siehe (3)] und Mister X sie zerstört hat [siehe (2)], muss die Katze Mister X heißen (und ist dann wohl ein Kater).

Sarah betreut den Vogel [siehe (4)], der nicht Benny heißen kann [siehe (1)]. Die Namen „Max“ und „Mister X“ sind auch schon vergeben, so bleibt nur der Name „Felix“.

Für Celina bleibt der Hund mit dem Namen „Benny“ übrig.

Zusammenfassung:

Martina betreut den Hamster Max.

Vanessa betreut den Kater (oder die Katze) Mister X.

Sarah betreut den Vogel Felix.

Celina betreut den Hund Benny.

Punktverteilungsvorschläge

Die Punktzahlen für die einzelnen *Aufgaben* sind verbindlich.

Die Einschätzung der Punktzahlen für einzelne *Teilschritte* einer Schülerlösung (nach dem Maßstab „Verwendbarkeit des Teilschrittes in einem zum Ziel führenden Lösungsweg“) liegt beim Korrektor; die folgenden Aufteilungen sind möglicherweise dem Vorgehen in einer Schülerlösung anzupassen und können in diesem Sinne gelegentlich abgeändert werden.

Aufgabe 510621 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 510622 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	2 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	5 Punkte

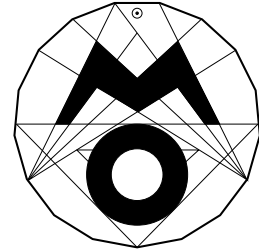
Aufgabe 510623 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	3 Punkte
Teil b)	5 Punkte
Teil c)	2 Punkte

Aufgabe 510624 *Insgesamt: 10 Punkte*

Lösung	5 Punkte
Begründung	5 Punkte

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Lösungen



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

510721 Lösung

10 Punkte

Teil a) I. Mit p , b , s und h seien die Hausnummern der Freunde Priska, Betty, Sarah und Holger bezeichnet. Dann lautet die Kurzfassung der Angaben:

- (1) $p + b + s + h = 56$,
- (2) $b = 2p$,
- (3) $s = 2b$,
- (4) $h = \frac{b}{2}$.

Setzt man nun die Gleichungen (2), (3) und (4) in die Gleichung (1) ein, dann erhält man

$$p + 2p + 2b + \frac{b}{2} = 56. \tag{5}$$

Durch Einsetzen der Gleichung (2) in Gleichung (5) folgt

$$p + 2p + 2 \cdot (2p) + \frac{2p}{2} = 56. \tag{6}$$

Fasst man Gleichung (6) zusammen, dann erhält man $8p = 56$. Folglich gilt

$$p = 7. \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (7) und (2) folgt $b = 14$. Hieraus und mit (3) und (4) erhält man $s = 28$ bzw. $h = 7$.

II. Da es nach Aufgabenstellung mindestens eine Lösung gibt, es nach I. nur höchstens eine Lösung gibt, müssen die in I. gefundenen Zahlen p , b , s und h die gesuchten Hausnummern sein.

Aus I. und II. folgt, dass Priska die Hausnummer 7, Betty die Hausnummer 14, Sarah die Hausnummer 28 und Holger die Hausnummer 7 hat.

Teil b) Probe: Weil $7 + 14 + 28 + 7 = 56$ gilt, ist die Summe der Hausnummern der Freunde gleich der Hausnummer von Annika. Da 7 die Hausnummer Priskas ist und weil $14 = 2 \cdot 7$ gilt, ist die Hausnummer von Betty das Doppelte der Hausnummer von Priska. Weil $28 = 2 \cdot 14$ gilt, ist die Hausnummer von Sarah doppelt so groß wie Bettys Hausnummer. Weil $7 = 14 : 2$ gilt, ist Holgers Hausnummer genau die Hälfte von Bettys Hausnummer. Damit ist nachgewiesen, dass die ermittelten Hausnummern tatsächlich die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Hinweis auf eine Lösungsvariante zu Teil a): Mit p , b , s und h seien die Hausnummern der Freunde Priska, Betty, Sarah und Holger bezeichnet. Dann folgt aus der Aussage (2) für Bettys Hausnummer

$$b = 2p. \tag{8}$$

Aus der Gleichung (8) und der Aussage (3) folgt für Sarahs Hausnummer

$$s = 4p. \quad (9)$$

Aus der Gleichung (8) und der Aussage (4) folgt für Holgers Hausnummer

$$h = p. \quad (10)$$

Dann folgt aus der Aussage (1) sowie den Gleichungen (8), (9) und (10), dass $p + 2p + 4p + p = 56$, also $8p = 56$ und daher $p = 7$ gilt.

Hieraus und aus den Gleichungen (8), (9) und (10) folgt dann, dass Priska die Hausnummer 7, Betty die Hausnummer 14, Sarah die Hausnummer 28 und Holger die Hausnummer 7 hat.

Bemerkung: Eine Lösung ist auch durch systematisches Probieren möglich. Hierzu ist mit Hilfe von Gleichung (1) zu zeigen, dass nur endlich viele Fälle zu untersuchen sind, dass sich aus diesen Fällen nur eine mögliche Lösung ergibt und dass diese tatsächlich eine Lösung ist.

510722 Lösung

10 Punkte

Teil a) I. Wenn drei Strecken mit den Längen a , b und c die Seiten eines Dreiecks bilden sollen, dann müssen die folgenden Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

Für $a = 13$ cm, $b = 7$ cm und $c = p$ cm muss daher gelten

$$20 > p, \quad 13 + p > 7, \quad 7 + p > 13.$$

Da für positive ganze Zahlen p stets $13 + p > 7$ gilt und die dritte Ungleichung äquivalent zu $p > 13 - 7$ ist, können die drei Ungleichungen zu $6 < p < 20$ zusammengefasst werden. Da p nach Voraussetzung eine Primzahl ist, kann daher nur $p \in \{7, 11, 13, 17, 19\}$ gelten.

II. Wie man sich leicht überzeugt, erfüllen diese Zahlen tatsächlich die gestellten Bedingungen.

Aus I. und II. folgt, dass 7 cm, 11 cm, 13 cm, 17 cm und 19 cm alle möglichen Längen der dritten Strecke sind, welche die gestellten Bedingungen erfüllen.

Teil b) I. Wenn es eine Strecke mit der Länge q cm gibt, welche die gestellten Bedingungen erfüllt, dann muss entsprechend Teil a) nun $6 < q < 20$ gelten. Für die Maßzahl u des Umfanges gilt $13 + 7 + q = u$. Hieraus folgt $20 + q = u$ und daher $u > 20$. Da u nach Voraussetzung eine Primzahl ist, gilt also $u \in \{23, 29, 31, 37, 41, \dots\}$. Hieraus und aus $q = u - 20$, $6 < q < 20$ folgt $q \in \{9, 11, 17\}$.

II. Wie man sich leicht überzeugt, erfüllen die drei Zahlen für q alle gestellten Bedingungen.

Aus I. und II. folgt, dass 9 cm, 11 cm und 17 cm alle möglichen Längen der dritten Strecke sind, welche die gestellten Bedingungen erfüllen.

Hinweis: Ein Existenznachweis durch Konstruktion ist auf Grund von Zeichenungenauigkeiten kein ausreichender Beweis.

510723 Lösung

10 Punkte

Teil a) und *Teil b)* Wir bezeichnen die sechs Spielfreunde der Reihe nach mit A , B , C , D , E , F und zum Beispiel mit $\{A, B, C\}$ das Spielertrio Albert, Bruno, Clemens, wobei die Reihenfolge der Spieler eines Trios nicht relevant ist.

I. Angenommen, es gibt eine Möglichkeit, die zwei Dreiergruppen zu bilden, so müssen nach den Forderungen (3) und (1) Clemens und Franz in einem Trio sein, dem Albert nicht angehört. Diesen Forderungen genügen nur die Trios

$$\{B, C, F\}, \quad \{C, D, F\}, \quad \{C, E, F\}.$$

Da B auf jeden Fall mitspielen soll, widerspricht das Trio $\{C, E, F\}$ der Forderung (2).

Zum Trio $\{B, C, F\}$ gehört das Trio $\{A, D, E\}$. Jedoch ist $\{A, D, E\}$ wegen Forderung (1) kein zulässiges Trio.

Als einzige Möglichkeit, die zwei Dreiergruppen zu bilden, verbleibt die Aufteilung $\{C, D, F\}$ und $\{A, B, E\}$.

II. Wie man sich leicht überzeugen kann, erfüllen die zwei Dreiergruppen $\{C, D, F\}$ und $\{A, B, E\}$ die Forderungen (1) bis (3).

Aus I. und II. folgt, dass die Aufteilung $\{C, D, F\}$ und $\{A, B, E\}$ die einzige Möglichkeit ist, unter den gestellten Forderungen die sechs Spielfreunde in zwei Dreiergruppen aufzuteilen.

Teil c) Die oben angegebene Aufteilung in zwei Dreiergruppen erfüllt die Forderung (4) nicht, da David und Franz in einer Gruppe sind. Daher gibt es keine Aufteilung in zwei Dreiergruppen, welche den Forderungen (1), (2), (3) und (4) genügt.

Teil d) Die Forderung (5) ist erfüllt, wenn Forderung (1) erfüllt ist. Folglich ist die formale Aussage in (5) eine logische Folgerung aus der Forderung (1). Da die Forderung (1) von der angegebenen Aufteilung erfüllt wird, trifft dies auch für die Forderung (5) zu.

Hinweis auf eine Lösungsvariante: Diese Aufgabe kann auch durch *systematisches Erfassen aller Fälle* gelöst werden. Dazu müssen alle 10 Paare von Spieltrios notiert werden und es muss jeweils überprüft werden, ob alle sich durch die gegebenen Forderungen ergebenden Bedingungen erfüllt sind. Dabei genügt zum Aussondern einer Aufteilung in Spielertrios die Angabe einer nicht erfüllten Bedingung für eines der Trios.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass bei derartigen Aufgaben außer einem *Einzigkeitsnachweis* (Herleitung) auch ein *Existenznachweis* (Probe) erforderlich ist, weil man nur auf diese Weise erkennen kann, ob eine für die Herleitung nicht benötigte Bedingung von der angegebenen Lösung auch tatsächlich erfüllt wird.

510724 Lösung

10 Punkte

Teil a) Es werden folgende drei Fälle unterschieden:

Fall 1: Beide Zahlen lassen bei Division durch 3 denselben Rest. Dann lässt die Differenz der beiden Zahlen bei Division durch 3 immer den Rest 0, d. h. die Differenz ist durch 3 teilbar.

Fall 2: Eine Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 0, die andere Zahl lässt den Rest 1 oder 2. Dann lässt das Produkt dieser beiden Zahlen bei Division durch 3 den Rest 0, d. h. das Produkt ist durch 3 teilbar.

Fall 3: Eine Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1, die andere lässt den Rest 2. Dann lässt die Summe der beiden Zahlen bei Division durch 3 den Rest 0, d. h. die Summe ist durch 3 teilbar.

In jedem der möglichen Fälle befindet sich unter Differenz, Summe und Produkt der beiden positiven ganzen Zahlen jeweils ein Ergebnis, welches durch 3 teilbar ist.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es folglich nicht vorkommen, dass keines der drei Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

Teil b) Es gibt folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Wenigstens zwei Zahlen lassen bei Division durch 3 denselben Rest. Dann lässt die Differenz zweier solcher Zahlen bei Division durch 3 den Rest 0, d. h. diese Differenz ist durch 3 teilbar. Da (bis auf das Vorzeichen) jede Differenz vertreten ist, ist in diesem Fall mindestens eine der Differenzen $a - b$, $b - c$ oder $a - c$ durch 3 teilbar.

Fall 2: Es treten alle Reste auf. Dann lässt die Summe der drei Zahlen bei Division durch 3 den Rest 0, d. h. die Summe ist durch 3 teilbar.

In jedem der möglichen Fälle befindet sich unter den Differenzen oder der Summe jeweils ein Ergebnis, welches durch 3 teilbar ist.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es folglich nicht vorkommen, dass keines dieser vier Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

Lösungsvariante zu Teil a): Für zwei positive ganze Zahlen a , b gilt bei Division mit Rest durch eine positive ganze Zahl m , dass der nichtnegative Rest der Summe, der Differenz oder des Produkts dieser Zahlen stets gleich dem nichtnegativen Rest der Summe, der Differenz bzw. des Produkts der Reste bezüglich m ist.

Da es bezüglich der Division durch 3 für a und b jeweils die Reste 0, 1 und 2 gibt, gibt es genau 9 paarweise verschiedene Verteilungen der Reste auf diese beiden Zahlen a und b . Diese 9 Fälle sind in der folgenden Tabelle festgehalten. Entsprechend der jeweiligen Reste von a und b wurden in der dritten, vierten bzw. fünften Zeile die nichtnegativen Reste der Reste von $a + b$, $a - b$ bzw. $a \cdot b$ eingetragen:

a	0	0	0	1	1	1	2	2	2
b	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$a + b$	0	1	2	1	2	0	2	0	1
$a - b$	0	2	1	1	0	2	2	1	0
$a \cdot b$	0	0	0	0	1	2	0	2	1

Da in jeder Spalte unter den Resten der Summe, der Differenz oder des Produktes mindestens einmal der Rest 0 auftritt, kann es folglich nicht vorkommen, dass weder die Summe, noch die Differenz noch das Produkt durch 3 teilbar ist.

Hinweis: Der nichtnegative Rest einer Zahl bei Division durch eine positive ganze Zahl m ist stets eine nichtnegative Zahl kleiner als m . Die Summe bzw. das Produkt von nichtnegativen Zahlen kleiner als m kann aber größer als m sein. Die Differenz zweier nichtnegativer Zahlen kleiner als m kann negativ sein. Daher müssen im Allgemeinen von der Summe, der Differenz bzw. des Produkts der Reste erneut der nichtnegative Rest bei Division durch m gebildet werden. Wird mit absolut kleinstem Rest gearbeitet, ist ein Hinweis, dass der negative Rest -1 dem positiven Rest 2 und der Rest -2 dem Rest 1 entspricht, sinnvoll. Darauf ist bei derartigen Schülerlösungen zu achten. Die wiederholte Restebildung ist vermeidbar, wenn mit Restklassen modulo m oder mit Kongruenz modulo m gearbeitet wird.

Während eine Lösung mit systematischem Probieren in Teil a) noch sinnvoll scheint, ist sie in Teil b) eher unzweckmäßig, da dort 27 Fälle zu untersuchen wären und dabei leicht die Systematik und Übersichtlichkeit verloren gehen können.

Punktverteilungsvorschläge

Die Punktzahlen für die einzelnen *Aufgaben* sind verbindlich.

Die Einschätzung der Punktzahlen für einzelne *Teilschritte* einer Schülerlösung (nach dem Maßstab „Verwendbarkeit des Teilschrittes in einem zum Ziel führenden Lösungsweg“) liegt beim Korrektor; die folgenden Aufteilungen sind möglicherweise dem Vorgehen in einer Schülerlösung anzupassen und können in diesem Sinne gelegentlich abgeändert werden.

Aufgabe 510721 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Richtiges Ergebnis	4 Punkte
Vollständige und korrekte Herleitung	4 Punkte
Teil b) Probe	2 Punkte

Aufgabe 510722 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	5 Punkte
Teil b)	5 Punkte

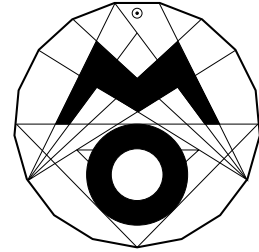
Aufgabe 510723 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Ergebnis	2 Punkte
Herleitung bzw. Probe	3 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	1 Punkt
Teil d)	2 Punkte

Aufgabe 510724 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	6 Punkte
Teil b)	4 Punkte

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Lösungen



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

510821 Lösung

10 Punkte

Wir bezeichnen mit v_W die Geschwindigkeit von Wendelin, mit s_W die Wegstrecke von Wendelin und mit t_W die Wanderzeit von Wendelin. Analog bezeichne v_V , s_V und t_V die Größen für Valentin und mit s sei die Gesamtlänge des Weges bezeichnet.

Nach Aufgabenstellung gilt

$$s = 34 \text{ km.} \tag{1}$$

Aus der Startzeit 6:00 Uhr von Wendelin, der Startzeit 10:00 Uhr von Valentin und der Treffzeit 12:00 Uhr folgen

$$t_W = 6 \text{ h,} \tag{2}$$

$$t_V = 2 \text{ h.} \tag{3}$$

Teil a) Nach Aufgabenstellung gilt hier zusätzlich

$$s_V = 10 \text{ km.} \tag{4}$$

Da sich Valentin mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegte, gilt $v_V = \frac{s_V}{t_V}$. Mit den Gleichungen (3) und (4) folgt

$$v_V = \frac{10 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 5 \text{ km/h.}$$

Da sich Wendelin und Valentin auf dem gleichen Weg entgegengeliefen, gilt die Gleichung $s = s_W + s_V$. Hieraus und aus den Gleichungen (1) und (4) folgt die Gleichung $34 \text{ km} = s_W + 10 \text{ km}$, also

$$s_W = 24 \text{ km.} \tag{5}$$

Da sich Wendelin mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegte, gilt $v_W = \frac{s_W}{t_W}$. Mit den Gleichungen (1) und (5) folgt

$$v_W = \frac{24 \text{ km}}{6 \text{ h}} = 4 \text{ km/h.}$$

Für das arithmetische Mittel der beiden Wandergeschwindigkeiten gilt

$$\frac{v_W + v_V}{2} = \frac{4 \text{ km/h} + 5 \text{ km/h}}{2} = 4,5 \text{ km/h.}$$

Folglich wanderte Wendelin mit einer Geschwindigkeit von 4 Kilometer pro Stunde, Valentin mit einer Geschwindigkeit von 5 Kilometer pro Stunde und das arithmetische Mittel der beiden Wandergeschwindigkeiten beträgt 4,5 km/h.

Teil b) Da sich Wendelin und Valentin auf dem gleichen Weg mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit entgegenliefen, gilt

$$s = v_W \cdot t_W + v_V \cdot t_V. \quad (6)$$

Weiterhin gilt laut Aufgabenstellung

$$\frac{v_W + v_V}{2} = 4,5 \text{ km/h}. \quad (7)$$

Aus Gleichung (7) erhält man durch äquivalentes Umformen

$$v_V = 9 \text{ km/h} - v_W. \quad (8)$$

Setzt man die Gleichungen (8), (1), (2) und (3) in Gleichung (6) ein, erhält man

$$34 \text{ km} = v_W \cdot 6 \text{ h} + (9 \text{ km/h} - v_W) \cdot 2 \text{ h}.$$

Äquivalentes Umformen liefert $34 \text{ km} = v_W \cdot 4 \text{ h} + 18 \text{ km}$. Diese Gleichung lässt sich zu $16 \text{ km} = v_W \cdot 4 \text{ h}$ vereinfachen. Daraus folgt nun

$$v_W = 4 \text{ km/h}. \quad (9)$$

Setzt man Gleichung (9) in Gleichung (8) ein, erhält man $v_V = 5 \text{ km/h}$.

Folglich lässt sich die Geschwindigkeit von Wendelin und von Valentin mit 4 Kilometer pro Stunde bzw. 5 Kilometer pro Stunde eindeutig bestimmen.

Lösungsvariante für Teil a): Nach Aufgabenstellung war Valentin 2 Stunden unterwegs und legte in dieser Zeit 10 km zurück. Da er sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit fortbewegte, ging er folglich mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h.

Nach Aufgabenstellung war Wendelin 6 Stunden unterwegs. Da der Gesamtweg nach Aufgabenstellung 34 km lang ist und Valentin davon 10 km zurücklegte, musste Wendelin bis zu ihrem gemeinsamen Treffpunkt 24 km wandern. Da er sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit fortbewegte, ging er folglich mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h.

Bemerkung: Diese Lösung scheint einfacher zu sein, da sie ohne Variablen auskommt. Da die Durchschnittsgeschwindigkeit der beiden Wanderer mit derjenigen in Teilaufgabe b) übereinstimmt, scheinen die beiden Teilaufgaben einander nicht zu widersprechen. Zu zeigen ist dann noch, dass die angegebene Durchschnittsgeschwindigkeit nicht auch durch andere Wandergeschwindigkeiten erreicht werden kann. Dies erhält man, indem man eine zu Gleichung (7) analoge Gleichung umformt, um die Wanderwegstrecke von Wendelin zu erhalten. Spätestens an dieser Stelle sind ähnlich viele Variablen einzuführen.

Teil a) Da es 6 Freunde sind, gibt es 6 Möglichkeiten, die erste Stufe zu betreten; für die zweite Stufe verbleiben noch 5 Möglichkeiten. Entsprechend fortfahrend, gibt es für die letzte Stufe nur noch eine Möglichkeit. Folglich gibt es

$$(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =) 720$$

Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn die Freunde sich nacheinander auf jeweils eine Stufe stellen.

Teil b) Da bereits zwei Positionen auf der Rolltreppe besetzt sind, verbleiben noch vier freie Treppenstufen. Für die erste freie Treppenstufe gibt es nun 4, für die zweite 3 für die dritte 2 und für die vierte genau eine Möglichkeit, sie zu betreten. Folglich gibt es

$$(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =) 24$$

Möglichkeiten für Bodo, Cuno, Doro und Enno, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno als erster und Fero als letzter mit der Rolltreppe fahren wollen.

Teil c) Arno, Bodo und Cuno wollen auf drei unmittelbar aufeinander folgenden Stufen stehen. Für diese Reihenfolge gibt es $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6 Möglichkeiten.

Wir fassen diese drei Freunde zu einer Gruppe zusammen. Für die Position der anderen drei Freunde gibt es vier Möglichkeiten: Keiner ist vor der Gruppe, alle sind dahinter oder einer ist vor der Gruppe, zwei sind dahinter oder zwei sind vor der Gruppe, einer ist dahinter oder alle sind vor der Gruppe, keiner ist dahinter. Für die Reihenfolge der anderen Freunde gibt es wieder jeweils $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6 Möglichkeiten.

Folglich gibt es $(6 \cdot 4 \cdot 6 =)$ 144 Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno, Bodo und Cuno auf jeweils einer Stufe unmittelbar hintereinander stehen wollen.

Teil a) Mit $QS(z)$ bezeichnen wir die Quersumme einer positiven ganzen Zahl z .

I. Angenommen, es gibt eine zweistellige Zahl $z = 10a + b$ mit $z = 7 \cdot QS(z)$. Dann gelten die Beziehungen

$$a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

und

$$10a + b = 7(a + b). \tag{2}$$

Nach Auflösen der Klammer und äquivalentem Umformen erhält man die Gleichung $3a = 6b$ und daraus

$$b = \frac{a}{2}. \tag{3}$$

Wegen der Gleichungen (1) und (3) muss a gerade sein. Für a kommen daher nur noch die Zahlen 2, 4, 6 und 8 infrage. Für diese Zahlen a bestimmen wir der Reihe nach b aus Gleichung (3) und berechnen $z = 10a + b$:

a	2	4	6	8
b	1	2	3	4
z	21	42	63	84

Folglich kann z nur eine der folgenden Zahlen sein:

$$21, \quad 42, \quad 63, \quad 84. \tag{4}$$

II. Die in (4) aufgeführten Zahlen z sind alle zweistellig. Zu überprüfen ist noch $z = 7 \cdot \text{QS}(z)$, was wir tabellarisch machen, wobei wir w für „wahr“ und f für „falsch“ notieren:

z	21	42	63	84
$\text{QS}(z)$	3	6	9	12
$7 \cdot \text{QS}(z)$	21	42	63	84
$z = 7 \cdot \text{QS}(z)$	w	w	w	w

Aus I. und II. folgt, dass die Zahlen 21, 42, 63 und 84 alle zweistelligen Zahlen sind, die 7-mal so groß sind wie ihre Quersumme.

Teil b) Es sei z eine dreistellige Zahl mit $z = 19 \cdot \text{QS}(z)$. Da z dreistellig ist, gilt $1 \leq \text{QS}(z) \leq 27$. Da $19 \cdot \text{QS}(z)$ eine dreistellige Zahl sein soll, muss sogar $6 \leq \text{QS}(z) \leq 27$ gelten.

Für $q \in \{6, 7, \dots, 27\}$ bestimmen wir daher nun der Reihe nach $z = 19 \cdot q$, berechnen $\text{QS}(z)$, überprüfen, ob $\text{QS}(z) = q$ gilt und notieren den entsprechenden Wahrheitswert. Wegen $z = 19q$ gilt die geforderte Gleichung $z = 19 \cdot \text{QS}(z)$ genau dann, wenn die Gleichung $\text{QS}(z) = q$ gilt. Wir führen diese Berechnungen und Überprüfungen tabellarisch durch:

q	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304
$\text{QS}(z)$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	7
$\text{QS}(z) = q$	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	f
$z = 19 \cdot \text{QS}(z)$	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	f

q	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
z	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513
$\text{QS}(z)$	8	9	10	11	21	13	14	15	16	17	9
$\text{QS}(z) = q$	f	f	f	f	w	f	f	f	f	f	f
$z = 19 \cdot \text{QS}(z)$	f	f	f	f	w	f	f	f	f	f	f

Folglich kann z nur eine der folgenden Zahlen sein:

$$114, \quad 133, \quad 152, \quad 171, \quad 190, \quad 209, \quad 228, \quad 247, \quad 266, \quad 285, \quad 399. \tag{5}$$

Da die in (5) aufgeführten Zahlen alle dreistellig sind und, wie in der Tabelle nachgewiesen, 19-mal so groß sind wie ihre Quersumme, sind dies folglich alle Zahlen mit diesen Eigenschaften.

Lösungsvariante: Es sei $\text{QS}(z)$ die Quersumme einer positiven ganzen Zahl z .

Teil a) I. Angenommen, es gibt eine zweistellige Zahl z mit $z = 7 \cdot \text{QS}(z)$. Dann gibt es Ziffern $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ mit $a \neq 0$ und $z = 10a + b$ und

$$10a + b = 7(a + b). \tag{1}$$

Aus Gleichung (1) folgen $3a = 6b$ und weiter $a = 2b$. Wegen $1 \leq a \leq b$ kann nur $b \in \{1, 2, 3, 4\}$ gelten. Folglich kommen für z nur die Zahlen

$$21, \quad 42, \quad 63, \quad 84 \tag{2}$$

infrage.

II. Die in (2) angegebenen Zahlen haben die Quersummen

$$3, \quad 6, \quad 9, \quad 12.$$

Da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen in (2) gleich 21 ($= 3 \cdot 7$) ist, die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Quersummen gleich 3 ist, und da $21 = 7 \cdot \text{QS}(21)$ gilt, sind alle Zahlen in (2) tatsächlich 7-mal so groß wie ihre Quersumme. Offenbar sind es auch zweistellige Zahlen.

Aus I. und II. folgt, dass die in (2) angegebenen Zahlen alle zweistelligen Zahlen sind, die 7-mal so groß sind wie ihre Quersumme.

Teil b) I. Angenommen, es gibt eine dreistellige Zahl z mit $z = 19 \cdot \text{QS}(z)$. Dann gibt es Ziffern $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ mit $a \neq 0$ und $z = 100a + 10b + c$ und

$$100a + 10b + c = 19(a + b + c). \tag{3}$$

Aus Gleichung (3) folgt $81a - 9b - 18c = 0$ und daher

$$9a - b - 2c = 0. \tag{4}$$

Äquivalente Umformung von Gleichung (4) ergibt $9a = b + 2c$. Wegen $b \leq 9$ und $c \leq 9$ folgt $9a \leq 27$ und daher $a \leq 3$, also $a \in \{1, 2, 3\}$. Das Auflösen von Gleichung (4) nach c ergibt

$$c = \frac{9a - b}{2}. \tag{5}$$

Für $a = 3$ folgt hieraus $c = \frac{27 - b}{2}$. Wegen $c \leq 9$ und $b \leq 9$ kann nur $b = 9$ und daher $c = 9$ gelten, was die Zahl

$$399 \tag{6}$$

für z ergibt.

Für $a = 2$ folgt aus (5), dass $c = \frac{18 - b}{2}$ gilt. Da der Nenner des Bruchs gerade ist, muss dies auch für dessen Zähler zutreffen, woraus $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ folgt. Folglich kommen mit $a = 2$ nur die folgenden Zahlen

$$209, \quad 228, \quad 247, \quad 266, \quad 285 \tag{7}$$

für z infrage.

Für $a = 1$ folgt analog, dass $c = \frac{9 - b}{2}$ mit $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ gelten muss. Folglich kommen mit $a = 1$ nur die folgenden Zahlen

$$114, \quad 133, \quad 152, \quad 171, \quad 190 \tag{8}$$

für z infrage.

II. Es gelten $QS(399) = 21$ und $19 \cdot 21 = (20 - 1)(20 + 1) = 400 - 1 = 399$. Somit erfüllt die in (6) angegebene Zahl die Forderungen.

Für die in (7) angegebenen Zahlen sind

$$11, 12, 13, 14, 15$$

die Quersummen. Da $19 \cdot 11 = 209$ gilt und die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen in (7) gleich 19 ist, sind alle Zahlen in (7) tatsächlich 19-mal so groß wie ihre Quersumme.

Für die in (8) angegebenen Zahlen sind

$$6, 7, 8, 9, 10$$

die Quersummen. Da $19 \cdot 10 = 190$ gilt und die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen in (8) gleich 19 ist, sind alle Zahlen in (8) tatsächlich 19-mal so groß wie ihre Quersumme.

Da auch alle in (6), (7) und (8) angegebenen Zahlen dreistellig sind, erfüllen die in (6), (7) und (8) angegebenen Zahlen die gegebenen Bedingungen.

Aus I. und II. folgt, dass genau die elf in (6), (7) und (8) angegebenen Zahlen diejenigen dreistelligen Zahlen sind, welche 19-mal so groß wie ihre Quersumme sind.

510824 Lösung

10 Punkte

Teil a) Die Kurzformulierung der Angaben lautet:

- (0) A, B, C und D liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt M ,
- (1) $|\sphericalangle BAD| = 80^\circ$,
- (2) $|\sphericalangle MAD| = 30^\circ$,
- (3) $|\sphericalangle BMC| = 70^\circ$.

Wegen Bedingung (0) sind \overline{AM} , \overline{BM} und \overline{CM} Radien desselben Kreises und daher gleich lang. Folglich sind die Dreiecke ABM und BCM gleichschenkelig. Nach dem Basiswinkelsatz sind die Innenwinkel dieser Dreiecke bei A und B bzw. B und C jeweils gleich groß. Diese Größen der Innenwinkel werden mit α bzw. β bezeichnet, siehe Abbildung L 510824 a.

Da M im Innern des Vierecks $ABCD$ liegt, gilt wegen der Bedingungen (1) und (2)

$$\alpha = |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle MAD| = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ.$$

Nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck BCM und wegen Bedingung (3) folgt

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 70^\circ) = 55^\circ.$$

Da M im Innern des Vierecks $ABCD$ liegt, folgt

$$|\sphericalangle CBA| = \alpha + \beta = 105^\circ. \quad (4)$$

Nach dem in Stufe 1 erörterten Satz über gegenüberliegende Innenwinkel im Sehnenviereck erhält man aus

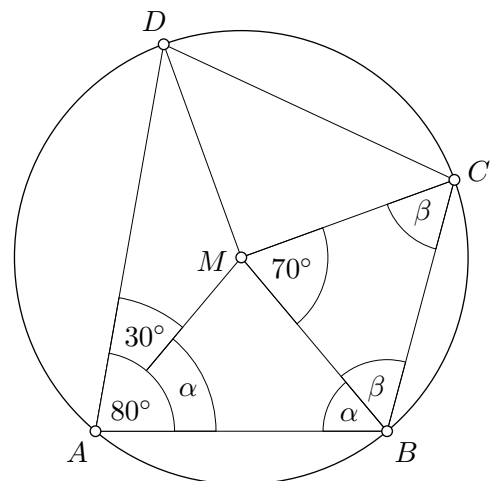


Abbildung L 510824 a

Bedingung (1) und Gleichung (4) sofort

$$\begin{aligned} |\sphericalangle DCB| &= 180^\circ - |\sphericalangle BAD| = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ, \\ |\sphericalangle ADC| &= 180^\circ - |\sphericalangle CBA| = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ. \end{aligned}$$

Die Innenwinkel CBA , DCB und ADC haben in dieser Reihenfolge folglich die Größen 105° , 100° und 75° .

Teil b) Die Kreise um A und B durch P haben die Gerade AB als Symmetrieachse. Wenn der Punkt P nicht auf der Geraden AB liegen würde, gäbe es nach Spiegelung an AB einen zweiten, von P verschiedenen Berührungspunkt beider Kreise. Dies stände im Widerspruch dazu, dass sich zwei verschiedene Kreise in höchstens einem Punkt berühren. Folglich liegt P auf der Geraden AB . Ähnlich folgt, dass Q , R und S auf den Geraden BC , CD bzw. DA liegen.

Da jedes der Dreiecke APS , BQP , CRQ und DSR jeweils einen Mittelpunkt eines Kreises als Eckpunkt hat und die beiden anderen Punkte auf der Peripherie dieses Kreises liegen, sind die genannten Dreiecke gleichschenkelig und haben nach dem Basiswinkelsatz daher jeweils gleich große Winkel bei S und P , P und Q , Q und R bzw. R und S . Die Größen dieser Basiswinkel in den Dreiecken APS , BQP , CRQ und DSR werden entsprechend mit α , β , γ bzw. δ bezeichnet, siehe Abbildung L 510824 b.

Nach dem Innenwinkelsatz im Dreieck sind $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 2\beta$, $180^\circ - 2\gamma$ und $180^\circ - 2\delta$ die Größen der Innenwinkel des Vierecks $ABCD$. Nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke gilt daher

$$4 \cdot 180^\circ - 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^\circ.$$

Hieraus folgt

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ. \quad (1)$$

Da S auf der Geraden durch A und D und Q auf der Geraden durch B und C liegen, gelten die Gleichungen

$$\alpha + |\sphericalangle PSR| + \delta = 180^\circ, \quad \beta + |\sphericalangle RQP| + \gamma = 180^\circ$$

und daher

$$|\sphericalangle PSR| + |\sphericalangle RQP| = 2 \cdot 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta). \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt

$$|\sphericalangle PSR| + |\sphericalangle RQP| = 180^\circ.$$

Hieraus folgt nach der Umkehrung des Satzes über gegenüberliegende Innenwinkel im Sehnenviereck, dass das Viereck $PQRS$ ein Sehnenviereck ist und daher die Berührungspunkte P , Q , R und S der vier Kreise auf einem Kreis liegen.

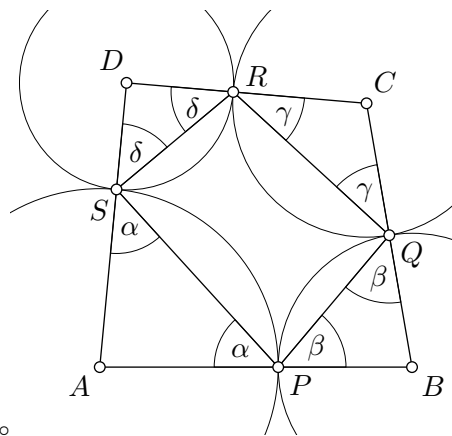


Abbildung L 510824 b

Punktverteilungsvorschläge

Die Punktzahlen für die einzelnen *Aufgaben* sind verbindlich.

Die Einschätzung der Punktzahlen für einzelne *Teilschritte* einer Schülerlösung (nach dem Maßstab „Verwendbarkeit des Teilschrittes in einem zum Ziel führenden Lösungsweg“) liegt beim Korrektor; die folgenden Aufteilungen sind möglicherweise dem Vorgehen in einer Schülerlösung anzupassen und können in diesem Sinne gelegentlich abgeändert werden.

Aufgabe 510821 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	5 Punkte
Teil b)	5 Punkte

Aufgabe 510822 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 510823 *Insgesamt: 10 Punkte*

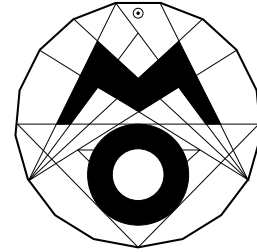
Teil a) Richtiges Ergebnis	1 Punkt
Vollständige und korrekte Herleitung	2 Punkte
Probe	1 Punkt
Teil b) Richtiges Ergebnis	1 Punkt
Vollständige und korrekte Herleitung mit Probe	5 Punkte

Für die Probe in Teil b) sind je nach dem für sie noch nötigen Aufwand 1 bis 4 Punkte vorzusehen.

Aufgabe 510824 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	4 Punkte
Teil b)	6 Punkte

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalsrunde)
Klasse 9
Lösungen



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

510921 Lösung

10 Punkte

Da alle vier Ergebnisse positiv sind, gilt $a - b > 0$ und damit $a > b$. Wegen $a + b > 0$ gilt dann auch $a > 0$, also muss wegen $a \cdot b > 0$ auch $b > 0$ gelten. Aus $b > 0$ folgt $a + b > a - b$. Daraus ergeben sich sechs Möglichkeiten für die Belegung von $(a + b; a - b)$.

Die Summe der Terme $a + b$ und $a - b$ ergibt $2a$, damit lässt sich a (und damit auch b) in jedem der sechs Fälle ermitteln. Wir erhalten folgende Tabelle

$a + b$	$a - b$	a	b	$a \cdot b$	$a : b$
3,9	3,6	3,75	0,15	0,5625	entfällt
3,9	1,6	2,75	1,15	3,1625	entfällt
3,9	0,9	2,4	1,5	3,6	1,6
3,6	1,6	2,6	1	2,6	entfällt
3,6	0,9	2,25	1,35	3,0375	entfällt
1,6	0,9	1,25	0,35	0,4375	entfällt

Nur für $a = 2,4$ und $b = 1,5$ erhält man mit dem Produkt $3,6$ ein erlaubtes Ergebnis und der Quotient $1,6$ passt auch dazu.

Also ist das Zahlenpaar $(a; b) = (2,4; 1,5)$ das einzige, welches die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

510922 Lösung

10 Punkte

Wir betrachten zunächst den Test mit der gesendeten Signalkombination $(R, G, B) = (1, 0, 0)$. In der folgenden Tabelle sind in der ersten Spalte alle Fehlerkombinationen der Leitungspaare RG , RB und GB erfasst, wobei 0 für Fehlerfreiheit steht, in der zweiten Spalte ist für jede Fehlerkombination die ankommende Signalkombination (r, g, b) angegeben, in der dritten wird zur Erleichterung der Übersicht jeder ankommenden Signalkombination als Binärzahl ihr Dezimalwert zugeordnet.

RG	RB	GB	r	g	b	Fall
0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	1	0	0	4
0	0	2	1	0	0	4
0	1	0	0	0	1	1
0	1	2	0	0	1	1
0	2	0	1	0	1	5
0	2	1	1	1	0	6
1	0	0	0	1	0	2
1	0	2	0	1	0	2
1	2	0	0	1	1	3
2	0	0	1	1	0	6
2	0	1	1	0	1	5
2	1	0	0	1	1	3

Es ist nun zu zeigen, dass in jedem der sechs Fälle ein weiterer Test genügt, um die Fehlerbestimmung abzuschließen. Wir zeigen, dass es sogar (mindestens) einen weiteren Test gibt, der für alle Fälle genügt, nämlich den Test mit der Signalkombination $(R, G, B) = (0, 1, 0)$. Dafür legen wir eine entsprechend aufgebaute Tabelle für diese gesendete Kombination an, in der die Fälle der ersten aufsteigend sortiert sind:

RG	RB	GB	r	g	b	Fall aus Test 1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	2	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	2
1	0	2	1	0	1	2
1	2	0	1	0	0	3
2	1	0	0	1	1	3
0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	4
0	0	2	0	1	1	4
0	2	0	0	1	0	5
2	0	1	1	0	1	5
0	2	1	0	0	1	6
2	0	0	1	1	0	6

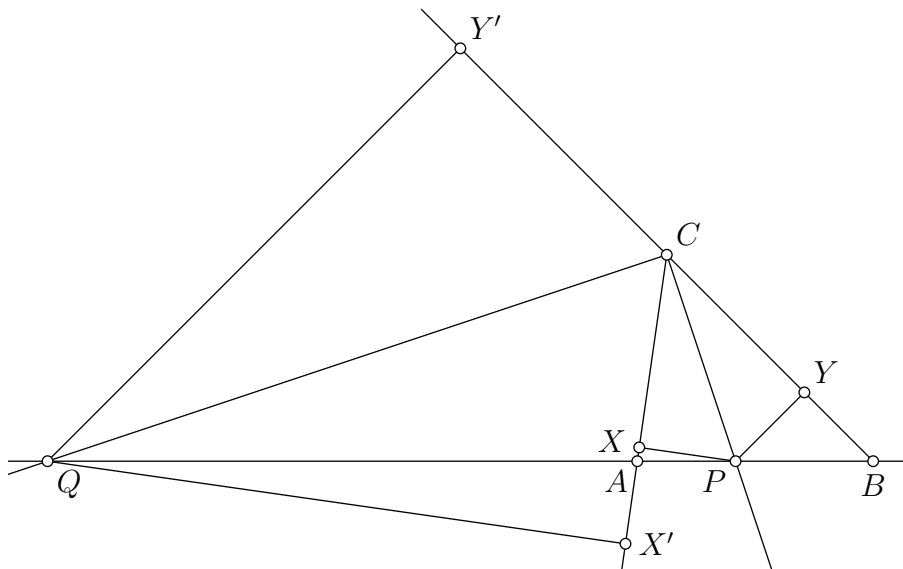
Die Tabelle zeigt, dass im Test 2 für keinen der sechs Fälle von Test 1 bei zwei Fehlerkombinationen dieselbe Signalkombination ankommt. In jedem möglichen Fall genügen also diese beiden Tests:

Die Eingabe von $(1, 0, 0)$ liefert die Fallnummer - erste Tabelle. Gibt man danach $(0, 1, 0)$ ein, kann man an Hand der zweiten Tabelle die betroffenen Leitungen sowie die jeweiligen Fehler ablesen.

Die Gleichung $z^2 = 25p + 9$ ist äquivalent zu $25p = z^2 - 9 = (z + 3)(z - 3)$. Der Term $25p$ lässt sich auf verschiedene Arten in zwei natürliche Faktoren zerlegen. Wir suchen aus allen möglichen Zerlegungen diejenigen heraus, in denen man für p eine Primzahl erhält, wenn sich die beiden Faktoren um genau 6 (die Differenz zwischen $z + 3$ und $z - 3$) unterscheiden:

$(z + 3)$	$(z - 3)$	Bedingung für p	p ausgerechnet	p Primzahl
25	p	$25 - p = 6$	19	ja
p	25	$p - 25 = 6$	31	ja
$25p$	1	$25p - 1 = 6$	0,28	nein
1	$25p$	$1 - 25p = 6$	-0,2	nein
5	$5p$	$5 - 5p = 6$	-0,2	nein
$5p$	5	$5p - 5 = 6$	2,2	nein

Da p eine Primzahl sein soll, sind keine weiteren Zerlegungen von $25p$ in ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen möglich. Die einzigen Lösungen ergeben sich für $p = z - 3 = 19$ und $p = z + 3 = 31$. Die entsprechenden Paare (p, z) sind $(19, 22)$ und $(31, 28)$.



Teil a) Die Dreiecke PCX und PCY haben die Winkelhalbierende \overline{PC} als gemeinsame Seite und stimmen in der Größe der Innenwinkel bei C sowie der rechten Winkel überein. Daher sind auch die Innenwinkel bei P gleich groß. Die beiden Dreiecke sind also nach dem Kongruenzsatz (wsw) kongruent mit $|PX| = |PY|$. Die Summe aus Winkel und Nebenwinkel beträgt 180° . Halber Winkel und halber Nebenwinkel ergeben also 90° . Folglich müssen die Halbierenden von Winkel und zugehörigem Nebenwinkel aufeinander senkrecht stehen, also gilt $|\sphericalangle QCP| = 90^\circ$.

Teil b) Die Teildreiecke APC und PBC haben eine gemeinsame von C ausgehende Höhe. Das Verhältnis der Flächeninhalte wird also allein durch das Verhältnis der zugehörigen Grundseiten \overline{AP} und \overline{PB} bestimmt und stimmt mit diesem überein.

Teil c) Das Verhältnis der Flächeninhalte der Teildreiecke APC und PBC kann auch bestimmt werden, indem man die Strecken \overline{AC} bzw. \overline{CB} als Grundseiten und die nach a) gleich langen Strecken \overline{PX} bzw. \overline{PY} als Höhen betrachtet. Analog zu b) erhält man als Flächeninhaltsverhältnis $|AC| : |CB|$, mit b) also $|AC| : |CB| = |AP| : |PB|$.

Teil d) Es seien X' und Y' die Fußpunkte der Lote von Q auf AC bzw. BC . Analog zu a) zeigt man, dass $\triangle QCX'$ und $\triangle QCY'$ die Winkelhalbierende \overline{QC} als gemeinsame Seite haben und in der Größe der Innenwinkel bei Q und C übereinstimmen, also kongruent sind mit $|QX'| = |QY'|$. Da $\triangle QAC$ und $\triangle QBC$ die von C ausgehende Höhe gemeinsam haben, folgt daraus

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AC| \cdot |QX'|}{|BC| \cdot |QY'|} = \frac{F(QAC)}{F(QBC)} = \frac{|AQ|}{|QB|},$$

wobei $F(UVW)$ den Flächeninhalt von $\triangle UVW$ bezeichnet.

Punktverteilungsvorschläge

Die Punktzahlen für die einzelnen *Aufgaben* sind verbindlich.

Die Einschätzung der Punktzahlen für einzelne *Teilschritte* einer Schülerlösung (nach dem Maßstab „Verwendbarkeit des Teilschrittes in einem zum Ziel führenden Lösungsweg“) liegt beim Korrektor; die folgenden Aufteilungen sind möglicherweise dem Vorgehen in einer Schülerlösung anzupassen und können in diesem Sinne gelegentlich abgeändert werden.

Aufgabe 510921 *Insgesamt: 10 Punkte*

Einschränkung auf 6 Fälle	4 Punkte
Korrekte Abarbeitung dieser Fälle	4 Punkte
Folgerung Lösung und Eindeutigkeit	2 Punkte

Aufgabe 510922 *Insgesamt: 10 Punkte*

Fälle nach dem ersten Test	5 Punkte
Wahl Zweittest	1 Punkt
Nachweis, dass Zweittest geeignet	4 Punkte

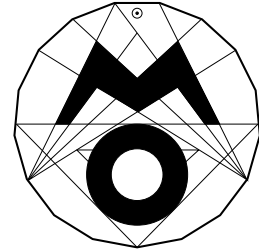
Aufgabe 510923 *Insgesamt: 10 Punkte*

Einschränkung auf etwa 6 Fälle	4 Punkte
Korrekte Diskussion dieser Fälle	4 Punkte
Ergebnis	2 Punkte

Aufgabe 510924 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	2 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	3 Punkte
Teil d)	3 Punkte

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Lösungen



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

511021 Lösung

10 Punkte

Eine umfangreiche tabellarische Untersuchung führt zum Ziel.

Kürzer ist aber folgende Überlegung:

Das Senden von $(0, 0, 0)$ oder $(1, 1, 1)$ liefert keinen Informationsgewinn, da das Signal durch keinen Fehler verändert wird. Zu einer erfolgreichen Fehlerermittlung müssen also entweder eine Eins und zwei Nullen oder zwei Einsen und eine Null gesendet werden.

Nach Aufgabenstellung ist die Anzahl der ankommenden Einsen gleich der Anzahl der gesendeten oder um genau eins größer.

Fall 1: Es werden eine Eins und zwei Nullen gesendet.

Wenn dann genau eine Eins ankommt, kann keine andere Leitung die Leitung mit Eins berühren. Deshalb ist noch offen, ob sich die beiden Leitungen mit Null berühren oder nicht.

Wenn genau zwei Einsen ankommen, dann berührt die Leitung mit Eins eine andere Leitung. In diesem Fall kann man noch nicht entscheiden, ob die Leitungen mit Null vertauscht sind oder nicht.

Fall 2: Es werden eine Null und zwei Einsen gesendet.

Wenn dann genau eine Null ankommt, kann keine andere Leitung die Leitung mit Null berühren. Deshalb ist noch offen, ob sich die beiden Leitungen mit Eins berühren oder nicht.

Wenn keine Null ankommt, dann berührt eine Leitung mit Eins die Leitung mit Null. In diesem Fall kann man noch nicht entscheiden, ob die Leitungen mit Eins vertauscht sind oder nicht.

Also kann keiner der Tests allein zur vollständigen Fehlerermittlung ausreichen.

511022 Lösung

10 Punkte

Aus der Voraussetzung $a > 2$ sowie der Gültigkeit der Standardungleichungen $b^2 > 0$ und $b + \frac{1}{b} \geq 2$ für alle $b > 0$ folgt:

$$\begin{aligned} & a^2 + (a + b) + (a - b) + a \cdot b + \frac{a}{b} + b^2 \\ &= a \left(a + 2 + b + \frac{1}{b} \right) + b^2 > 2 \cdot (2 + 2 + 2) + 0 = 12. \end{aligned}$$

Wenn die Ungleichung $b + \frac{1}{b} \geq 2$ nicht bekannt ist, kann sie leicht bewiesen werden:

Für alle $b > 0$ gilt

$$b + \frac{1}{b} = \sqrt{b^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 - 2\sqrt{b} \frac{1}{\sqrt{b}} + 2 = \left(\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 + 2 \geq 2$$

oder wurzelfrei:

$$b + \frac{1}{b} \geq 2 \Leftrightarrow b^2 + 1 \geq 2b \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (b - 1)^2 \geq 0.$$

511023 Lösung

10 Punkte

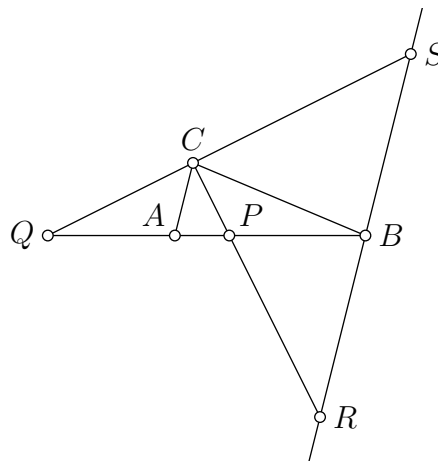
Die Gleichung $z^2 = 25p + 9$ ist äquivalent zu $25p = z^2 - 9 = (z + 3)(z - 3)$. Der Term $25p$ lässt sich auf verschiedene Arten in zwei natürliche Faktoren zerlegen. Wir suchen aus allen möglichen Zerlegungen diejenigen heraus, in denen man für p eine Primzahl erhält, wenn sich die beiden Faktoren um genau 6 (die Differenz zwischen $z + 3$ und $z - 3$) unterscheiden:

$(z + 3)$	$(z - 3)$	Bedingung für p	p ausgerechnet	p Primzahl
25	p	$25 - p = 6$	19	ja
p	25	$p - 25 = 6$	31	ja
$25p$	1	$25p - 1 = 6$	0,28	nein
1	$25p$	$1 - 25p = 6$	-0,2	nein
5	$5p$	$5 - 5p = 6$	-0,2	nein
$5p$	5	$5p - 5 = 6$	2,2	nein

Da p eine Primzahl sein soll, sind keine weiteren Zerlegungen von $25p$ in ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen möglich. Die einzigen Lösungen ergeben sich für $p = z - 3 = 19$ und $p = z + 3 = 31$. Die entsprechenden Paare (p, z) sind $(19, 22)$ und $(31, 28)$.

511024 Lösung

10 Punkte



Teil a) Da sich die Größen eines Innenwinkels und eines der zugehörigen Außenwinkel zu 180° ergänzen, bilden ihre Winkelhalbierenden einen Winkel von 90° . Deshalb ist $\triangle PCQ$ rechtwinklig bei C . Da $\sphericalangle BRC$ und $\sphericalangle ACR$ Wechselwinkel an den Parallelen AC und BR sind und CR den Winkel ACB halbiert, gilt $|\sphericalangle BRC| = |\sphericalangle ACR| = |\sphericalangle RCB|$. Also ist $\triangle CBR$ gleichschenkelig mit $|RB| = |CB|$.

Teil b) In der Strahlensatzfigur mit dem Zentrum P und den parallelen Strecken \overline{AC} und \overline{RB} gilt $|AP| : |PB| = |AC| : |RB|$. Wegen $|RB| = |CB|$ (nach a)) folgt daraus die Behauptung.

Teil c) Da AC und BR parallel sind und QC die Gerade AC in C schneidet, schneidet QC auch BR . Sei S der Schnittpunkt von QC und BR . Dann liegt wegen $|\sphericalangle PCQ| = 90^\circ$ der Punkt C auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser \overline{RS} und B ist dessen Mittelpunkt wegen $B \in \overline{RS}$ und $|RB| = |CB|$. Also folgt auch $|CB| = |SB|$ und aus der Strahlensatzfigur mit Zentrum Q und den parallelen Strecken \overline{AC} und \overline{BS} damit

$$|AQ| : |QB| = |AC| : |BS| = |AC| : |CB|.$$

Teil d) Wegen b) und c) gilt mit den Voraussetzungen von d)

$$|AP| : |PB| = |AQ| : |BQ| = |AC| : |CB| = 3 : 4.$$

Daraus folgt $|BQ| = \frac{4}{3}|AQ|$ und daher $|AB| = \frac{1}{3}|AQ|$ und weiter $|AP| = \frac{3}{7}|AB| = \frac{1}{7}|AQ|$. Da $|\sphericalangle ACP| = 45^\circ$ gilt, ist AC auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle QCP$, also folgt wegen b), angewandt auf $\triangle QPC$, dass $|QC| : |CP| = |QA| : |AP| = 7$ gilt.

Punktverteilungsvorschläge

Die Punktzahlen für die einzelnen *Aufgaben* sind verbindlich.

Die Einschätzung der Punktzahlen für einzelne *Teilschritte* einer Schülerlösung (nach dem Maßstab „Verwendbarkeit des Teilschrittes in einem zum Ziel führenden Lösungsweg“) liegt beim Korrektor; die folgenden Aufteilungen sind möglicherweise dem Vorgehen in einer Schülerlösung anzupassen und können in diesem Sinne gelegentlich abgeändert werden.

Aufgabe 511021 *Insgesamt: 10 Punkte*

Geeignete Einschränkung auf die 2 Fälle	2 Punkte
Diskussion Fall 1	4 Punkte
Diskussion Fall 2	4 Punkte

Aufgabe 511022 *Insgesamt: 10 Punkte*

Aufstellen und passendes Zurechtklammern der Summe	5 Punkte
Abschließende Abschätzung	5 Punkte

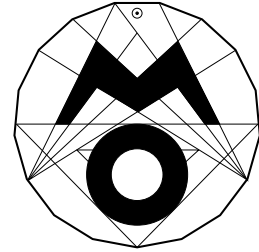
Aufgabe 511023 *Insgesamt: 10 Punkte*

Einschränkung auf etwa 6 Fälle	4 Punkte
Korrekte Diskussion dieser Fälle	4 Punkte
Ergebnis	2 Punkte

Aufgabe 511024 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	3 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	2 Punkte
Teil d)	3 Punkte

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11-13
Lösungen



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

511321 Lösung

10 Punkte

Es seien m und n positive ganze Zahlen. Ihre Zifferndarstellungen im Dezimalsystem seien

$$m = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0},$$

$$n = \overline{b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0},$$

wobei erforderlichenfalls die Zahl mit der geringeren Stellenzahl durch führende Nullen so ergänzt wurde, dass beide Dezimaldarstellungen gleich viele Ziffern haben.

Die Zifferndarstellung der Zahl $m + n$ hat dann die Form

$$m + n = \overline{c_{k+1} c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0}.$$

Dabei gilt

$$c_0 = a_0 + b_0 - 10u_0$$

und für $i = 1, \dots, k$ stets

$$c_i = a_i + b_i + u_{i-1} - 10u_i,$$

wobei $u_i \in \{0, 1\}$ der Übertrag ist, der bei der Addition von m und n an der Dezimalstelle i entsteht. Außerdem ist

$$c_{k+1} = u_k.$$

Es ist nun

$$Q(m) = a_k + \dots + a_1 + a_0,$$

$$Q(n) = b_k + \dots + b_1 + b_0$$

und

$$\begin{aligned} Q(m+n) &= c_{k+1} + c_k + \dots + c_1 + c_0 \\ &= u_k + (a_k + b_k + u_{k-1} - 10u_k) + \dots + (a_1 + b_1 + u_0 - 10u_1) + (a_0 + b_0 - 10u_0) \\ &= a_k + \dots + a_1 + a_0 + b_k + \dots + b_1 + b_0 - 9(u_k + \dots + u_1 + u_0) \\ &= Q(m) + Q(n) - 9(u_k + \dots + u_1 + u_0). \end{aligned}$$

Da die Überträge u_0, \dots, u_k nichtnegativ sind, trifft dies auch auf ihre Summe zu. Daraus folgt die Behauptung.

2. Lösung:

Der Beweis wird mit vollständiger Induktion nach der Anzahl der Stellen von n geführt.

Induktionsanfang: Die Zahl n sei einstellig. Zunächst gilt $Q(m+1) \leq Q(m) + 1$ für alle m , denn bei Addition von 1 zu einer natürlichen Zahl wird genau eine ihrer Ziffern vergrößert – und zwar um den Betrag 1 –, weil es von der Stelle dieser Ziffer aus keinen Übertrag mehr zur nächsthöheren Stelle gibt; je nach Auftreten von Überträgen können zugleich einige Ziffern um 9 verringert werden.

Durch wiederholte Anwendung der Ungleichung erhalten wir für beliebiges einstelliges n sofort

$$Q(m+n) \leq Q(m+n-1) + 1 \leq Q(m+n-2) + 2 \leq \dots \leq Q(m) + n = Q(m) + Q(n).$$

Induktionsschritt: Die Behauptung sei bereits für alle g -stelligen Zahlen n gezeigt. Es sei nun $n = 10\beta + b$ eine $(g+1)$ -stellige Zahl mit g -stelligem β und einer Ziffer b . Weiterhin sei eine Zahl m gegeben, die wir in der Form $m = 10\alpha + a$ mit einer Ziffer a schreiben.

Falls $a + b \leq 9$ ist, haben wir

$$Q(m+n) = Q(10(\alpha+\beta) + (a+b)) = Q(\alpha+\beta) + (a+b) \leq Q(\alpha) + a + Q(\beta) + b = Q(m) + Q(n),$$

wobei wir die Induktionsannahme für β benutzen.

Andernfalls ist $10 \leq a + b \leq 18$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} Q(m+n) &= Q(10(\alpha + \beta + 1) + (a + b - 10)) = Q(\alpha + \beta + 1) + (a + b - 10) \\ &\leq Q(\alpha + \beta) + 1 + a + b - 10 \leq Q(\alpha) + a + Q(\beta) + b - 9 \\ &= Q(m) + Q(n) - 9 < Q(m) + Q(n), \end{aligned}$$

wobei wir diesmal neben der Induktionsannahme für β noch die Ungleichung aus dem Induktionsanfang benutzt haben. Das beendet den Beweis.

511322 Lösung

10 Punkte

Der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} sei Q . Da \overline{AC} und \overline{BD} gleich lang sind, ist die Figur spiegelsymmetrisch zur Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AB} .

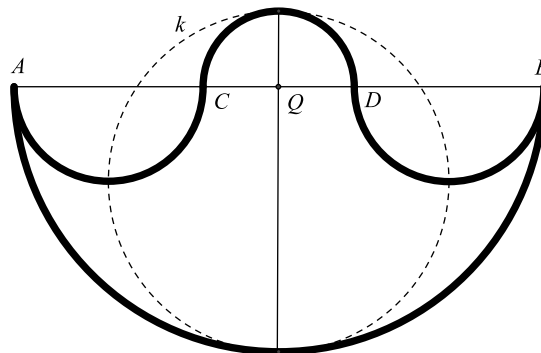


Abbildung L 511322

Die Halbkreise über \overline{AB} und \overline{CD} haben die Radien $\frac{1}{2}|AB|$ bzw. $\frac{1}{2}|CD|$. Die Halbkreise über \overline{AC} und \overline{DB} haben dann den Radius $\frac{1}{4}(|AB| - |CD|)$; der Radius des Kreises k beträgt $\frac{1}{4}(|AB| + |CD|)$.

Der Flächeninhalt des Salinons ergibt sich aus der Summe der Flächeninhalte der Halbkreise über \overline{AB} und \overline{CD} vermindert um die Flächeninhalte der Halbkreise über \overline{AC} und \overline{DB} :

$$\begin{aligned} F_{\text{Salinon}} &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{|AB|}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{|CD|}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\pi}{2} \left(\frac{|AB| - |CD|}{4} \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{8} \left(|AB|^2 + |CD|^2 - \frac{|AB|^2}{2} + |AB| \cdot |CD| - \frac{|CD|^2}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{2} (|AB|^2 + 2|AB| \cdot |CD| + |CD|^2) \\ &= \frac{\pi}{16} (|AB| + |CD|)^2 . \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt des Kreises k gilt:

$$\begin{aligned} F_k &= \pi \left(\frac{|AB| + |CD|}{4} \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{16} (|AB| + |CD|)^2 . \end{aligned}$$

Folglich ist $F_{\text{Salinon}} = F_k$.

511323 Lösung

10 Punkte

Für alle reellen Zahlen x und a gilt

$$(x^2 - xa + a^2)(x + a) = x^3 - x^2a + xa^2 + x^2a - xa^2 + a^3 = x^3 + a^3.$$

Die gegebene Gleichung ist daher äquivalent zu

$$\begin{aligned} (x^2 - xa + a^2)(x + a) &= x^2 - xa + a^2, \\ \text{also } (x + a - 1)(x^2 - xa + a^2) &= 0. \end{aligned}$$

Ein Produkt reeller Zahlen ist genau dann gleich 0, wenn mindestens einer der Faktoren gleich 0 ist.

Fall 1: $x + a - 1 = 0$. Dies ist äquivalent zu

$$x = 1 - a.$$

Damit existiert für jedes reelle a genau eine Lösung für diesen Fall, nämlich die reelle Zahl $x = 1 - a$.

Fall 2: $x^2 - xa + a^2 = 0$.

Es gilt

$$x^2 - xa + a^2 = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) + \frac{1}{2}(x - a)^2 \geq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $x = a = 0$ ist.

Somit ist für $a = 0$ genau die reelle Zahl $x = 0$ Lösung. Für $a \neq 0$ ergibt sich keine weitere Lösung.

Zusammenfassung: Alle Lösungen der gegebenen Gleichung sind

$$\begin{aligned} x &= 1 - a && \text{für alle } a \neq 0 \\ \text{bzw. } x &= 0 \quad \text{und} \quad x = 1 && \text{für } a = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Probe, dass $x = 1 - a$ für jedes reelle a Lösung ist, kann entfallen, wenn (wie in Fall 1 der obigen Lösung) die Äquivalenz zum Verschwinden eines Faktors festgestellt wird oder offensichtlich ist.

Ebenso kann die Probe, dass $x = 0$ für $a = 0$ Lösung ist, entfallen, wenn (wie in Fall 2 der obigen Lösung) die Äquivalenz des Gleichheitsfalles der Ungleichung zu $x = a = 0$ ausdrücklich festgestellt wird.

511324 Lösung

10 Punkte

Teil a) Für $n = 1$, also zwei Fechter, ist die Richtigkeit der Behauptung klar: Der Verlierer des einzigen Kampfes wird zuerst interviewt, der Sieger danach.

Für $n = 2$ gibt es vier Fechter. Da insgesamt $\binom{4}{2} = 6$ Kämpfe ausgeführt wurden, muss es nach dem Schubfachprinzip einen Fechter geben, der mindestens zwei Kämpfe verloren hat. Ihn möge die Reporterin als Ersten interviewen. Danach soll sie nach Aufgabenstellung noch weitere zwei Interviews führen; dazu kann sie nach Wahl des Erstinterviewten zwei Kämpfer auswählen, gegen die dieser verloren hat. Von ihnen wird wie beim Fall $n = 1$ derjenige zuerst ausgewählt, der gegen den anderen im direkten Vergleich verloren hat, so dass der letzte Interviewpartner tatsächlich gegen die beiden vor ihm gewonnen hat.

Teil b) Für $n = 3$ gibt es acht Fechter. Da insgesamt $\binom{8}{2} = 28$ Kämpfe ausgeführt wurden, muss es nach dem Schubfachprinzip einen Fechter geben, der mindestens vier Kämpfe verloren hat. Ihn möge die Reporterin als Ersten interviewen. Danach soll sie nach Aufgabenstellung noch weitere drei Interviews führen; nach Wahl des Erstinterviewten kann man vier Kämpfer auswählen, gegen die dieser verloren hat und die also für die weiteren Interviews in Frage kommen. Die Auswahl von drei Interviewpartnern aus vier Kämpfern ist genau die Situation für $n = 2$, von der wir nach Teil a) wissen, dass eine Auswahl möglich ist.

Dieses Prinzip führen wir allgemein fort:

Bei 2^n Fechtern werden in dem Turnier $\binom{2^n}{2} = \frac{2^n \cdot (2^n - 1)}{2}$ Kämpfe ausgefochten. Weil $2^n - 1$ für $n \geq 1$ eine ungerade Zahl ist, gibt es nach dem Schubfachprinzip einen Fechter, der gegen mindestens $\frac{2^n - 1}{2} + \frac{1}{2} = 2^{n-1}$ andere Turnierteilnehmer verloren hat. Dieser Fechter möge als Erster interviewt werden. Dann gibt es 2^{n-1} Teilnehmer, die man später interviewen kann, ohne dass die Bedingung gegenüber dem ersten Fechter verletzt wird und ohne dass es schon irgendeine Beschränkung in der Auswahl ihrer Reihenfolge gibt. Das heißt, dass man die Situation für ein um 1 kleineres n hat. Wenn man bereits weiß, dass es für diese Situation eine Lösung gibt, so ist der Beweis für n erbracht.

Mit dem beschriebenen Verfahren kann man nun also Schritt für Schritt zeigen, dass die Aufgabe für $n = 4$ lösbar ist, weil sie für $n = 3$ lösbar ist; dann, dass sie für $n = 5$ lösbar ist, weil sie für $n = 4$ lösbar ist; dann, dass sie für $n = 6$, $n = 7$ usw. lösbar ist; und somit ist sie für jede beliebige positive ganze Zahl n lösbar.

2. Lösung:

Die (geordnete) Auswahl der zum Interview ausgewählten Fechter wird im Folgenden stets mit A bezeichnet.

Teil a) Für $n = 1$, also zwei Fechter, ist die Richtigkeit der Behauptung klar: Beide Fechter gehören zur Auswahl A , und der Verlierer des einzigen Kampfes ist der zuerst Interviewte.

Für $n = 2$ gibt es vier Fechter. Es wird ein beliebiger Fechter a ausgewählt. Da a dreimal gekämpft hat, hat er nach dem Schubfachprinzip entweder mindestens zweimal gesiegt oder mindestens zweimal verloren. Es können also zwei Fechter b und c gefunden werden, gegen die a mit gleichem Ausgang gekämpft hat. Man bildet die Auswahl A aus den drei Fechtern a , b und c . Die Reihenfolge von b und c wird dabei so festgelegt, dass der Verlierer des Kampfes b gegen c zuerst gereiht wird. Hat a gegen b und c verloren, erhält er den ersten Platz in A , anderenfalls den dritten (letzten). Damit ist die Forderung der Aufgabenstellung erfüllt.

Teil b) Für $n = 3$ gibt es acht Fechter. Es wird wieder ein beliebiger Fechter a ausgewählt. Dieser hat siebenmal gekämpft und nach dem Schubfachprinzip mindestens viermal gewonnen oder mindestens viermal verloren. Nach dem zuvor Gesagten kann aus diesen vier Fechtern eine Auswahl A' von drei Fechtern ausgewählt werden, für die eine Reihenfolge entsprechend der Aufgabenstellung festgelegt werden kann. Fügt man a zu A' hinzu, erhält man eine Auswahl A mit vier Fechtern.

Die Reihenfolge der Fechter in der Auswahl A' ist bereits so festgelegt, dass die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt sind. Hat nun a gegen alle Fechter aus A' verloren, so erhält er den ersten Platz in A , anderenfalls hat er gegen alle Fechter aus A' gesiegt und erhält den letzten Platz. Damit genügt auch A den Forderungen der Aufgabenstellung.

Der letzte Schritt kann nun für $n = 4$ in gleicher Weise wiederholt werden, anschließend für $n = 5$ und so weiter. Allgemein gilt: Wenn man bereits weiß, dass für ein gewisses $n = k$ immer eine Auswahl der geforderten Art gebildet werden kann, so kann man für $n = k + 1$, also 2^{k+1} Fechter, einen Fechter a auswählen, und es gibt mindestens 2^k Fechter, gegen die a mit gleichem Ausgang gekämpft hat. Aus diesen 2^k Fechtern kann eine Auswahl A' von $k + 1$ Fechtern mit der gewünschten Eigenschaft ausgewählt werden. Die Auswahl A , die den Fechter a und alle Fechter aus A' enthält, hat dann ebenfalls die geforderte Eigenschaft, weil a in A entweder als Erster oder als Letzter platziert werden kann.

Damit ist gezeigt, dass für jede positive ganze Zahl n eine Auswahl A der geforderten Art gebildet werden kann.

Bemerkung: Das Verfahren, eine Aussage für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ zu zeigen, indem man nachweist, dass erstens die Aussage für $n = n_0$ gilt und zweitens aus der Gültigkeit der Aussage für $n = k$ stets ihre Gültigkeit für $n = k + 1$ folgt, heißt *vollständige Induktion* und ist eines der wichtigsten Beweisprinzipien der Mathematik (vgl. auch die zweite Lösung zu Aufgabe 511321).

Punktverteilungsvorschläge

Die Punktzahlen für die einzelnen *Aufgaben* sind verbindlich.

Die Einschätzung der Punktzahlen für einzelne *Teilschritte* einer Schülerlösung (nach dem Maßstab „Verwendbarkeit des Teilschrittes in einem zum Ziel führenden Lösungsweg“) liegt beim Korrektor; die folgenden Aufteilungen sind möglicherweise dem Vorgehen in einer Schülerlösung anzupassen und können in diesem Sinne gelegentlich abgeändert werden.

Aufgabe 511321

Insgesamt: 10 Punkte

Bei einem Vorgehen vergleichbar der 1. Lösung:

Ansatz mittels Zifferndarstellungen für m und n	2 Punkte
Rückführung der Zifferndarstellung für $m + n$ auf die Summanden	5 Punkte
Auswertung für Quersummen und Schluss auf Ergebnis	3 Punkte

Bei einem Vorgehen analog der 2. Lösung:

Geeigneter Induktionsansatz (z.B. Induktion nach Stellenzahl eines Summanden)	2 Punkte
Induktionsanfang	2 Punkte
Induktionsschritt und Schluss auf Behauptung	6 Punkte

Aufgabe 511322

Insgesamt: 10 Punkte

Rückführung der Kreisradien oder -durchmesser auf zwei geeignete Parameter	3 Punkte
Darstellung des Salinon-Flächeninhalts	5 Punkte
Darstellung des Kreisflächeninhalts und Schluss auf Behauptung	2 Punkte

Aufgabe 511323

Insgesamt: 10 Punkte

Ansatz mittels einer geeigneten algebraischen Identität wie der ersten Gleichung im Lösungsvorschlag	2 Punkte
Untersuchung aller auftretenden Fälle	4 Punkte
Durchgängiges Beachten von Äquivalenzumformungen, oder aber Probe für alle gefundenen Lösungen	2 Punkte
Zusammenfassende Angabe der Lösungen in der vom Aufgabentext geforderten parameterabhängigen Form	2 Punkte

Aufgabe 511324

Insgesamt: 10 Punkte

Fälle $n = 1$, $n = 2$ (Teil a)	3 Punkte
Verallgemeinerbare Untersuchung des Falles $n = 3$	2 Punkte
Darstellung der Fortführung einer Lösung von n auf $n + 1$ oder Rückführung des Falles $n + 1$ auf n	4 Punkte
Schluss auf Gültigkeit für beliebiges n	1 Punkt